10/19. キーワード. 基底と表現行列.

- 宿題の捕捉

W_1, W_2, W_3 ベクトル空間

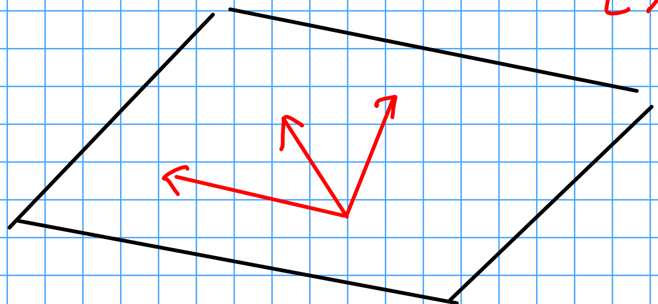
$\dim(W_1 + W_2 + W_3)$ ← この等式はウソ.

$= \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3$

$- \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_2 \cap W_3) - \dim(W_3 \cap W_1)$

$+ \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$

ヒント.



定義 $f: V^m \longrightarrow W^n$　f 線型写像

V^m m次元ベクトル空間

W^n n 〃

$\{v_1 \cdots v_m\}$ $\{w_1 \cdots w_n\}$ V, W の基底

f の基底 $\{v_1 \cdots v_m\}$ $\{w_1 \cdots w_n\}$ に関する表現行列とは n行m列の行列 A で

$$f\left(\sum a_i v_i\right) = \sum b_j w_j$$ に対して

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

をみたすものを言う.

例 $V = W = \mathbb{C}[x]_{\leq 2} = \{2次以下の多項式\}$

$f: V \longrightarrow V$ とする.

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \Psi & & \Psi \\ g(x) & \longmapsto & g'(x) \end{array}$$

※ $\{h(x) + g(x)\}' = h'(x) + g'(x)$

$\{\alpha g(x)\}' = \alpha g'(x)$

V の基底 $\{1, x, x^2\}$ を取ると

$$f(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

よって $\begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ をみたす A が表現行列

特に　$a=1,\ b=c=0$ の場合には,

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$ ← 右辺は A の1列目

$a=0\quad b=1\quad c=0$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$ ← 右辺は A の2列目

結局　$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

次に V の基底を $\{x+1,\ x-1,\ x^2\}$ とすると

$$f(a(x+1)+b(x-1)+cx^2)=a+b+2cx$$
$$=\frac{1}{2}(a+b)(x+1)-\frac{1}{2}(a+b)(x-1)$$
$$+c(x+1)+c(x-1)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+2c)(x+1)+\frac{1}{2}(-a-b+2c)(x-1)$$

上と同様の議論を行うと

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

V の基底を $\{x+1,\ x-1,\ x^2\}$ W の基底を $\{1,x,x^2\}$

とすると,　$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

以上のように表現行列は基底の取り方によって大きく変わる. できるだけ簡明な行列表示が得られる基底の選び方を学ぶのが線形代数の大きな目標

※ 何故表現行列と呼ばれるのか?

先の例の f で　$a+bx+cx^2\mapsto b+2cx$

一方　$a+bx+cx^2 \longleftrightarrow (a,b,c)$

という1対1対応がある.

$$A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\2c\\0\end{pmatrix}$$

この1:1対応は基底の選び方によって異なる.

$b+2cx+0\cdot x^2 \longleftrightarrow (b,\ 2c,\ 0)$

このように「微分すること」が行列とベクトルの掛け算で表せる.

例題 $V = W = \{ a\sin x + b\cos x \,;\, a, b \in \mathbb{R} \}$

$$V \ni f(x) \xrightarrow{F} f'(x) \in V$$

線型写像 F の 基底 $\sin x$, $\cos x$ に関する表現行列を求める.

$$F(a\sin x + b\cos x) = a\cos x - b\sin x$$

表現行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

※ $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

次に $\{ \sin x + \cos x,\ \sin x - \cos x \}$ で同じことを実行すると

$$F(a(\sin x + \cos x) + b(\sin x - \cos x)\}$$
$$= a(\cos x - \sin x) + b(\cos x + \sin x)$$

となるので, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

例題 $V = W = \mathbb{C}[x]_{\leq 3}$

$= \{ 3次以下の多項式 \}$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f(x) & \longmapsto & x f'(x) \end{array}$$

F の表現行列が対角行列となるような V, W の基底を1つ求めてみる. $A = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & b & & \\ & & c & \\ 0 & & & d \end{pmatrix}$ とおく

すると $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるので,

$F(f(x)) = a f(x)$ となる $f(x)$ を求めて, それらを基底とすれば良い.

$$F(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$
$$= b_1 x + 2b_2 x^2 + 3b_3 x^3$$

より $\begin{array}{cccc} 1, & x, & x^2, & x^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 \cdot 1 = 0 & x & 2x^2 & 3x^3 \end{array}$ ← 上の式からわかる.

よって 基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ とすれば,

表現行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

例 $V = W = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & W \\ f(x) \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] & f'(x) \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \end{tikzcd}$$

F の表現行列が対角行列となる基底はあるだろうか?

$$F(a+bx+cx^2) = \lambda(a+bx+cx^2)$$

をみたす a, b, c を求めてみる. 上式は

$$b + 2cx = \lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2$$

上式が x の恒等式になるのは $b=c=0$ のとき

のみ. つまり $f(x)=a$ (定数) のみが $F(f(x))=\lambda f(x)$

をみたす. 従ってどのような基底を選んでも対角化

することはできない. ($F(f(x))=\lambda f(x)$, すなわち

固有ベクトルが V の基底となる程十分にない.)

そこで基底として

$F(f_1(x)) = a$ となる $f_1(x) = ax$

$F(f_2(x)) = ax$ 〃 $f_2(x) = \frac{1}{2}ax^2$

$\{a, ax, \frac{1}{2}ax^2\}$ に関する表現行列は,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

※ Digression (可換図式)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d] & V_2 \arrow[r] \arrow[d] & V_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] & W_2 \arrow[r] & W_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

V_i, W_j ベクトル空間 $\longrightarrow$ 線型写像

矢印に沿って写像を合成したものはどのような

ルートを通っても等しい.

・完全系列

$$\to V_i \xrightarrow{F_i} V_{i+1} \xrightarrow{F_{i+1}} V_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

上の列が完全とは $\mathrm{Im}\, F_i = \mathrm{Ker}\, F_{i+1}$

が成り立つときを言う.

(Snake Lemma)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker} \arrow[d] \arrow[dddll, bend left] & \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d] & V_2 \arrow[r] \arrow[d] & V_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & W_2 \arrow[r] \arrow[d] & W_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & W_1/\mathrm{Ker} \arrow[r] & W_2/\mathrm{Ker} \arrow[r] & W_3/\mathrm{Ker} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

← 完全

(完全)

上のような完全列が存在する.