10/8 キーワード　基底，生成されるベクトル空間
直和

- ベクトル空間

体 k 上のベクトル空間とは集合 V で
元どうしの和，及び k の元による定数倍
が定義されたもの.

例 $V = \{$ 数列 a_n で 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ をみたすもの $\}$

$V \ni \{b_n\}, \{c_n\}$

$d_n = b_n + c_n$ で定義される数列は

$$d_{n+2} = b_{n+2} + c_{n+2}$$
$$d_{n+1} = b_{n+1} + c_{n+1}$$
$$d_n = b_n + c_n$$

b_n, c_n は漸化式をみたすので

$$d_{n+2} = b_{n+2} + c_{n+2}$$
$$= b_{n+1} + b_n + c_{n+1} + c_n$$
$$= d_{n+1} + d_n$$

よって $\{d_n\} \in V$

又 $e_n = cb_n$ $(c \in k)$ で定義される数列は

$$e_{n+2} = cb_{n+2}$$
$$= c(b_{n+1} + b_n)$$
$$= cb_{n+1} + cb_n = e_{n+1} + e_n$$

よって $\{e_n\} \in V$

- $\mathbb{R}$ (実数の集合)　$\mathbb{C}$ (複素数の集合)

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の構造をもち，又
$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の構造をもつ.

$\mathbb{C}$ の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての次元

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
基底 $\{1, i\}$

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
基底 $\{1\}$

- 基底

補題　ベクトル空間 V が有限個の元からなる基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ を持つとする，このとき，
他のどんな基底も同じ n 個の元からなる.

補題の証明

V の 2つの基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ $\{w_1 \cdots w_m\}$ に対して

$$\{v_1 \cdots v_n\} \sim \{w_1 \cdots w_m\} \iff n=m$$

と定義する. さて補題を証明するためには任意の基底 $\{w_1 \cdots w_m\}$ に対し

$$\{v_1 \cdots v_n\} \sim \{w_1 \cdots w_m\}$$

を示せばよい. そのためにまず集合

$\{v_1 \cdots v_{n-1}\}$ を考える. すると

ある w_{k_1} があり $\{v_1 \cdots w_{k_1}\}$ は基底となる. すなわち

$$\{v_1 \cdots v_{n-1}, w_{k_1}\} \sim \{v_1 \cdots v_n\}$$

何故なら上の主張の反対を仮定する.

全ての $w_1 \cdots w_m$ は $\{v_1 \cdots v_{n-1}\}$ 上 1次従属, すなわち

$$w_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} v_j$$

とかける. すると $\{w_1 \cdots w_m\}$ は基底なので

$$v_n = \sum_{k=1}^{m} b_k w_k$$

とかけ,

$$v_n = \sum b_k \left(\sum a_{ij} v_i\right)$$

と v_n がかけることとなり, これは $\{v_1 \cdots v_n\}$ が基底であることに反する. よって

$$\{v_1, \cdots, v_{n-1}, w_{k_1}\} \sim \{v_1 \cdots v_n\}$$

同様の議論を今度は

$\{v_1, \cdots, v_{n-1}, w_{k_1}\}$ と $\{w_1, \cdots, w_m\}$

に対して行うとある w_{k_2} があり,

$$\{v_1, \cdots, v_{n-2}, w_{k_1}, w_{k_2}\} \sim \{v_1 \cdots v_{n-1}, w_{k_1}\}$$

以下くりかえすと

$$\{v_1 \cdots v_n\} \sim \{w_{k_1}, \cdots, w_{k_n}\}$$

ここで $\{w_{k_1}, \cdots, w_{k_n}\} \subsetneq \{w_1 - w_m\}$

とするとある $w_{k_{n+1}}$ があり

$$w_{k_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} d_i w_{k_i}$$

とかけてしまう. ($\{w_{k_1}, \cdots, w_{k_n}\}$ が基底なので)

これは $\{w_1 \cdots w_m\}$ が基底であることに反する.

よって $\{v_1 \cdots v_n\} \sim \{w_1 \cdots w_m\}$

・生成される空間

（∪ と ⊕ の違い。）

ベクトル空間 V とその部分ベクトル空間 W_1, W_2 が与えられたとする。このとき、

$$W_1+W_2 := \{v = w_1+w_2 \mid w_1\in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

を W_1 と W_2 で生成された空間という。

Q. $W_1+W_2 \supseteq W_1\cup W_2$ を示せ。

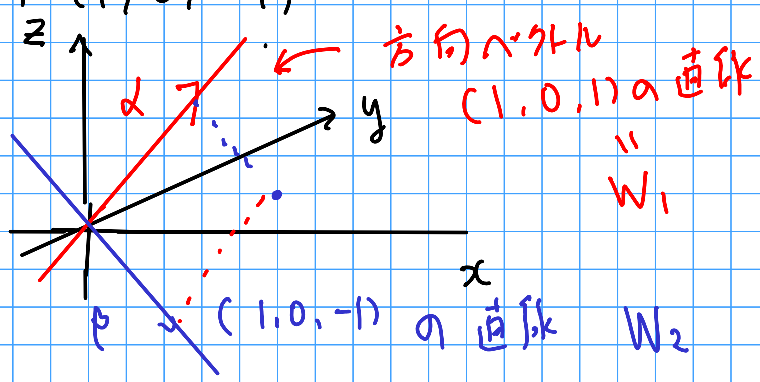
又 $=$ でない例を作れ。ただし

$$W_1\cup W_2 = \{v\in V \mid v\in W_1 \text{ 又は } v\in W_2\}$$

例 $V=\mathbb{R}^3$

$W_1 = \{(1,0,1)$ で生成されるベクトル空間$\}$

$W_2 = \{(1,0,-1)$ 〃 $\}$



このとき

$$W_1+W_2 = \{v = w_1+w_2 \mid w_1\in W_1,\ w_2\in W_2\}$$

W_1の元は $\alpha(1,0,1)$　W_2の元は $\beta(1,0,-1)$ と取れるので

$$W_1+W_2 = \{(\alpha+\beta,\ 0,\ \alpha-\beta)\}$$

となり、これは平面をなす。この平面の法線ベクトルは 上の $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ と直交するので、$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ が取れる。よって

平面の方程式は　$y=0$.

命題

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2)$$

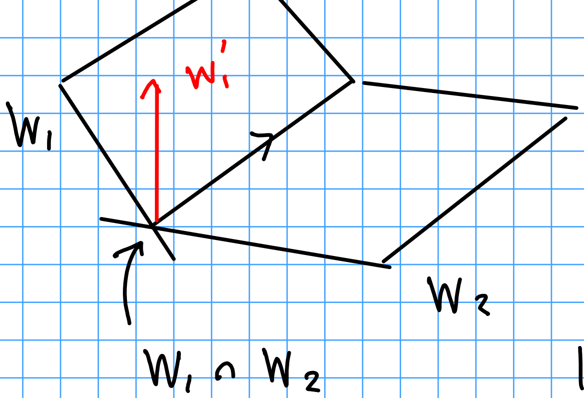
∵ $W_1\cap W_2$ の基底を $w_1 \cdots w_n$ とおく。

又 $\dim W_1 = n_1$　$\dim W_2 = n_2$ とする。

まず $W_1 \supset \{w'_1 \cdots w'_{n_1-n}\}$ で

$\{w_1 \cdots w_n,\ w'_1 \cdots w'_{n_1-n}\}$

が基底となるものが存在することを示す。



まず w_1' を
W_1の元で
$\{w_1 \cdots w_n\}$ 上
1次独立なものを取る.

このような w_1' は必ず取れる. 何故なら, このような元がなければ W_1 の全ての元は $\{w_1 \cdots w_n\}$ 上1次従属. 従って $\{w_1 \cdots w_n\}$ は W_1 の基底. よって $n = n_1$. これから $W_1 = W_1 \cap W_2$
すなわち $W_2 \supseteq W_1$ このとき, $W_1 + W_2 = W_2$
証明すべき式が

$$\underset{\dim W_2}{\underset{\|}{\dim(W_1+W_2)}} = \cancel{\dim} W_1 + \dim W_2 - \underset{\cancel{\dim W_1}}{\underset{\|}{\dim W_1 \cap W_2}}$$

となり成立するので, この場合は除外して良いからである.

さて元の議論に戻る. $\{w_1, \cdots, w_n, w_1'\}$ が W_1 の基底でなければ, さらに W_1 から $\{w_1 \cdots w_n, w_1'\}$ 上1次独立なもの w_2' を取り, $\{w_1 \cdots w_n, w_1', w_2'\}$ を考える.

この操作は $\dim W_1 = n_1$ より

$$\underbrace{\{w_1 \cdots w_n, w_1' \cdots w_{n_1-n}'\}}_{n_1\text{個}}$$

まで出来る.
同様に W_2 の元 $\{w_1'', \cdots, w_{n_2-n}''\}$ で $\{w_1 \cdots w_n, w_1'', \cdots, w_{n_2-n}''\}$ が W_2 の基底となるように取れる. 以上の元に対して

$$\underbrace{\{w_1 \cdots w_n, w_1' \cdots w_{n_1-n}', w_1'' \cdots w_{n_2-n}''\}}_{(\qquad)\text{個}}$$

という集合ができるが, これが $W_1 + W_2$ の基底であることを示せば命題の証明は完了する.
これが $W_1 + W_2$ の全ての元を生成することは明らか.
1次独立性のみ示す.

$$\sum a_i w_i + \sum b_j w_j' + \sum c_k w_k'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \underset{W_2}{\underset{\cap}{\sum a_i w_i + \sum c_k w_k''}} = -\underset{W_1}{\underset{\cap}{\sum b_j w_j'}}$$

両辺共 $W_1 \cap W_2$ にある. よって $\quad = \sum d_i w_i$ とおける.

$\sum d_i w_i = -\sum b_j w_j'$

$\Longleftrightarrow \sum b_j w_j' + \sum d_i w_i = 0$

$\{w_1 \cdots w_n, w_1' \cdots w_{n_1-n}'\}$ は基底なので

全ての $b_j, d_i = 0$　同様の議論で

全ての $c_k = 0$ がでて，これから全ての $a_i = 0$ がわかる. □

定義　$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のとき

$W_1 + W_2$ を W_1 と W_2 の直和と呼び

$W_1 \oplus W_2$ と書く.

例題　V ベクトル空間　W_1, W_2 部分ベクトル空間

$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$　$V = W_1 + W_2$

このとき V の元 v は W_1, W_2 の元 w_1, w_2

を用いて一意的にかけることを示す.

まず $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$ と

$$\dim(\overset{\shortparallel}{W_1 + W_2}) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

より　$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$　すなわち

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$V = W_1 + W_2$ より V の全ての元は

$v = w_1 + w_2$ とかける.

$v = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ とかけたとしよう.

このとき

$$\underset{W_1}{\underset{\cap}{w_1 - w_1'}} = \underset{W_2}{\underset{\cap}{w_2' - w_2}}$$

$$\left.\begin{matrix} w_1 - w_1' \\ w_2' - w_2 \end{matrix}\right\} \in W_1 \cap W_2$$

よって　$w_1 - w_1' = w_2' - w_2 = 0$

$w_1 = w_1'$，$w_2' = w_2$　//