10/5. 明日(10/6)の演習はまず 3-202 に集合すること.

・今日配布の宿題は 10/8 授業終了時に提出すること.

本日のキーワード

ベクトル空間, 基底, 次元.

・「体」について

定義もどき.

集合 $K$ が体とは, 加減乗除が定義されているときを言う.

例 $\mathbb{F}_3 := \{0, 1, 2\}$

$\mathbb{F}_3$ の元 $a, b$ に対して

$a+b := \{a+b$ を 3 で割った余り$\}$

$a \cdot b := \{a \cdot b$ を 3 で割った余り$\}$

定義に従えば

$1+2=0 \quad 2+2=1 \quad 2\cdot 2=1$

$1\times 1=1 \quad 2\cdot 2=1$ より $\mathbb{F}_3$ の 0 以外の元は逆元をもつ.

・ベクトル空間

定義

集合 $V$ が 体 $k$ 上のベクトル空間の構造をもつとは

(I) $v_1, v_2 \in V$ に対して $v_1+v_2$ が定義され以下の4つの条件をみたす.

1) $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$

2) $v_1+v_2 = v_2+v_1$

3) $^{\exists}0 \in V \quad 0+v_1 = v_1$

(ある 0 という特別な元が存在する.)

4) $^{\forall}v_1 \in V$ に対し $^{\exists}-v_1 \quad v_1+(-v_1)=0$

(II) $c \in k$, $v_1 \in V$ に対して $\cancel{k}\,c\,v_1$ が定義され以下の4つの条件をみたす.

1) $c, d \in k$ に対し $c(dv_1) = (cd)v_1$

2) $1\cdot v_1 = v_1$

3) $c(v_1+v_2) = cv_1 + cv_2$

4) $c, d \in k$ に対し

$(c+d)v_1 = cv_1 + dv_1$

例 $V=\mathbb{R}^2$（平面ベクトル）は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の構造をもつ.

(I) $V \ni (a_1, a_2),\ (b_1, b_2)$

$(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$,

$0 \in V$ は $(0, 0)$

このように定義する. すると 1)〜3) が成立するのは自明 $v_1=(a_1, a_2)$ に対し.

$-v_1=(-a_1, -a_2)$ とおくと, $v_1+(-v_1)=0$

(II) $c \in \mathbb{R}$ $v_1=(a_1, a_2) \in V$ に対し

$cv_1=(ca_1,\ ca_2)$ とおく. すると,

1)〜4) をみたすことはやはり自明.

例 $V=\mathbb{Q}[x]$ $\mathbb{Q}$ 係数多項式は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の構造をもつ.

0 は多項式としての 0 とする.

(I) $v_1=f(x)$ $v_2=g(x)$ に対し $v_1+v_2=f(x)+g(x)$

(II) $c \in \mathbb{Q}$, $v_1=f(x)$ に対し $cv_1=cf(x)$

とすれば ベクトル空間の定義をみたす.

・部分ベクトル空間

$V$: 体 $k$ 上のベクトル空間の構造をもつ集合

$W \subset V$ $V$ の部分集合.

$W$ が $V$ の部分ベクトル空間であるとは

1) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1+w_2 \in W$

2) $c \in k$ $w_1 \in W \Rightarrow cw_1 \in W$

の 2つをみたすときを言う.

補題. 部分ベクトル空間はベクトル空間の構造をもつ.

例題 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ に対し

$$W := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \right\}$$

という集合を考える. これがベクトル空間の構造を持つことを示せ.

解) $W \subset \mathbb{R}^2$ 又 $w_1=(x_1, y_1)$ $w_2=(x_2, y_2)$ を $W$ の元とすると

$$A\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ y_1+y_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

又 $c \in \mathbb{R}$ に対し

$$A\begin{pmatrix}cx_1\\ cy_1\end{pmatrix}=cA\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

よって $W$ は $\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間. 補題より

$W$ はベクトル空間の構造をもつ.

定義 $V$：ベクトル空間
$V$の基底とは $V$の部分集合 $\{v_1 \cdots v_n \cdots\}$
で次の2つの条件をみたすもののことを言う。

I) $\{v_1 \cdots v_n \cdots\}$ は1次独立。

II) $V$の全ての元 $v$ は $\{v_1 \cdots v_n \cdots\}$ の有限個の線形結合でかける。

例 $V = \mathbb{Q}[x]$ の部分集合 $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$
は基底となる。何故なら、

(I) $\sum a_n x^n = 0$ (多項式として) or 恒等式として

$\Rightarrow \forall n \quad a_n = 0$ (全ての$n$に対して 0)

(II) 全ての$\mathbb{Q}$係数多項式$f(x)$は次数を$m$とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

とかける。

このように $\sum$(係数)$v_i$ の形を線形結合という。

定理 $V$ ベクトル空間は基底をもつ。

注). 上の定理は選択公理と同値である。

命題 $V$ ベクトル空間に2つの基底があったとき、その濃度は等しい。

定義 集合$S_1$と$S_2$の濃度が等しいとは、
$S_1$と$S_2$に1対1対応がつくこと。

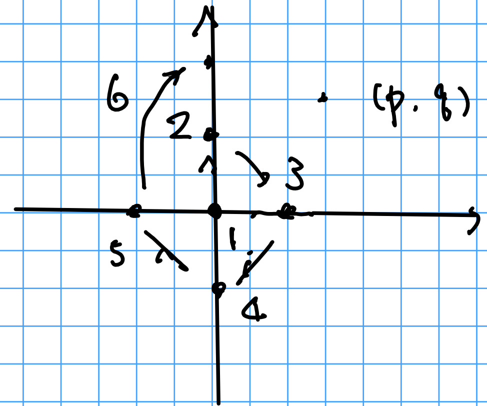
例 自然数と偶数の濃度は等しい。

$\mathbb{N} \longleftrightarrow$ 偶数の集合

$n \longleftrightarrow 2n$

1:1

又 自然数と有理数の濃度も等しい。




$(p, q) \longleftrightarrow \frac{p}{q}$

しかし 自然数と実数の濃度は等しくない。

一般に集合$S$の濃度を $\# S$ と書く

$\# S = \# \mathbb{N}$ のとき、$S$を可算無限

$\# S = \# \mathbb{R}$ 非可算無限

定義 $V$ ベクトル空間

$\dim V = \#\{$基底の濃度$\}$

例・$V=\mathbb{R}^3$ の次元を求める.

$V$の基底として $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ が取れる.

この濃度は 3 なので $\dim V=3$.

・$V=\mathbb{Q}[x,y]_n$ を次のように定義する.

$$\mathbb{Q}[x,y]_n := \left\{ f(x,y)\in\mathbb{Q}[x,y] \;\middle|\; \begin{array}{l} f(x,y) \text{の全ての項は } n \text{次} \\ \text{又は } f(x,y)=0 \end{array} \right\}$$

$\Downarrow$

$x^{n-k}y^k$ etc.

これは ベクトル空間の構造を持つ. 何故なら,

これは ベクトル空間 $\mathbb{Q}[x,y]$ の部分集合で

$f(x,y), g(x,y)\in\mathbb{Q}[x,y]_n$ に対して

$f(x,y)+g(x,y)\in\mathbb{Q}[x,y]_n$ (足しても次数は変わらない)

$c\in\mathbb{Q}$ $cf(x,y)\in\mathbb{Q}[x,y]_n$ (定数倍しても次数は変わらない)

となるからである.

次に $\mathbb{Q}[x,y]_n$ の基底として

$$x^{n-k}y^k \quad (0\leq k\leq n)$$

が取れるので, その濃度は $n+1$. つまり

$$\dim\mathbb{Q}[x,y]_n = n+1$$

宿題の訂正

$\mathbb{Q}[x,y]_n \longrightarrow \mathbb{Q}[x,y]_{\leq n}$

・$V=\mathfrak{sl}(2)$ を次のように定義する.

$$\mathfrak{sl}(2) := \left\{ A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \;\middle|\; a+d=0 \right\}$$

これが ベクトル空間の構造を持つこと,
基底を1つ. 又 次元を求めよ.

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/lecture/2009/math_A/index.html