復習　連立方程式の解き方

方程式　$Ax = b$　(A 行列　x, b 縦ベクトル

Step 1. (重要)

行列　(A, b) を考える.

例
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 3 \\ 4x + 3y + 2z + w = 7 \\ 2x - 3y - 8z - 13w = -1 \\ 5x + y - 3z - 7w = 6 \end{cases}$$

は $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -8 & -13 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ とおくと

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$　となる.

$$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -8 & -13 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 & 6 \end{array}\right)$$

この1列を加える.

Step 2　(A, b) を階段行列に変形する.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -5 \\ 0 & -7 & -14 & -21 & -7 \\ 0 & -9 & -18 & -27 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2行 - (1行 \times 4) \\ \leftarrow 3行 - (1行 \times 2) \\ \leftarrow 4行 - (1行 \times 5) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2行 \div 5 \\ 3行 \div 7 \\ 4行 \div 9 \end{array}$$

※ 行に対する操作のみ許される

$$\cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

※ 階段行列は 1のある列は その行以外は全て 0 となるまで変形する.

Step 3 解を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ } 全て0の行の数だけ変数は残る.

上の行列を B とし

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z - 2w - 1 \\ y + 2z - 3w - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき解は

$$\begin{cases} x - z - 2w - 1 = 0 \\ y + 2z - 3w - 1 = 0 \end{cases}$$

あるいは

$$\begin{cases} x = z + 2w + 1 \\ y = -2z + 3w + 1 \end{cases}$$

復習

問 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ に対し線型写像

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と定める.

例えば $(1, 0, 0)$ は $(a\ 1\ 1)$ にうつる.

$(0, 1, 0)$ $(1\ a\ 1)$ にうつる.

線型写像の基底 $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

に関する表現行列 ~~とは~~ を求めるには

$(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$ がうつった点

をまず計算する. それは

$(-a+1,\ 1-a,\ 0)$, $(-a+1,\ 0,\ \cancel{-a+1}\ a-1)$, $(a+2, a+2, a+2)$

となる. 次にこれらをベクトルと見たときの基底

に関する係数を求める.

$$\begin{pmatrix} -a+1 \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix} = (a-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a+1 \\ 0 \\ \cancel{-a+1}\ a-1 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2 \\ a+2 \\ a+2 \end{pmatrix} = \square\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \square\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \square\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求める表現行列は

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

← 先に求めた係数を列ベクトルとして並べたもの

復習. 逆行列の求め方

行列 A の逆行列 A^{-1} は次のようにして計算する. 行列 (A, E) を考える.

(A, E) の左の部分が単位行列 E となるよう連立1次方程式を解いたときのように変形する.

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 2行と3行のいれかえ

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

以下 左半分が $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ になるまで変形し

変形しおわったときの右半分が求める逆行列.

固有値

行列 A の固有値とは 今日の定義では

$\det(xE-A)=0$ の解.

例 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求める.

$$xE - A = \begin{pmatrix} x-a & -1 & -1 \\ -1 & x-a & -1 \\ -1 & -1 & x-a \end{pmatrix}$$

$$\det(xE-A)$$
$$= (x-a)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 - (-1)^2(x-a)\times 3$$
$$= (x-a)^3 - 3(x-a) - 2$$
$$= (x-a+1)^2(x-a-2) = 0$$

$x = a+2,\ a-1$