今日の話題.

・線型写像の定義 ← 今回から教科書§10

・線型写像の行列表示

定義 写像.

集合 S, T の間の写像とは, Sの各元 s に対し 唯1つの Tの元 $f(s)$ を割りあてるものである.

例 $S = \{人類\}$ $T = \mathbb{N}$ (自然数)

$$S \xrightarrow{f} T \qquad\qquad S \xrightarrow{g} T$$
$$人 \longmapsto 年齢 \qquad\qquad 人 \longmapsto 体重$$

次は写像ではない.

$S = T = \mathbb{R}$ (実数)

$$S \longrightarrow T$$
$$x \longmapsto x の平方根$$
← 1つに定らない

定義 線型写像

S, T をベクトル空間とする.

写像 $f : S \longrightarrow T$ が線型写像とは

(1) $s_1, s_2 \in S$ に対し

$$f(s_1 + s_2) = f(s_1) + f(s_2)$$

(2) α 定数 $s \in S$ に対し

$$f(\alpha s) = \alpha f(s)$$

をみたすときにいう.

例 $S = T = \mathbb{C}[x]$ ($\mathbb{C}$係数多項式の集合)

$$\mathbb{C}[x] \xrightarrow{f} \mathbb{C}[x]$$
$$g(x) \longmapsto g'(x)$$ ← 微分したもの.
$$x^3 \longmapsto 3x^2$$
$$2x + 2 \longmapsto 2$$
$$x^3 + 2x + 2 \longmapsto 3x^2 + 2$$
$$4x^3 \longmapsto 12x^2$$

※ 線型性とは

(1) 足してから $\mapsto$ でうつしたものと

$\mapsto$ でうつしてから 足したもの が 等しい

(2) (　　　) $\mapsto$ でうつしたものと

$\mapsto$ でうつしてから (　　　) したもの が 等しい

$g(x) \longmapsto g'(x)$ に対しては上の2つの条件がみたされているので線型写像である。

・線型写像の行列表示

ベクトル空間 V とその基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ を固定する。V の元 w の係数(座標)とは

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

と書いたときの $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ のこと。

例 $V = \{$4次以下の多項式$\}$

基底 $= \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ とする。

$V \ni x^4 - 2x^2 + 1$ の係数は

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 1 \cdot x^4 + 0\, x^3 - 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1$$

より $(1, 0, -2, 0, 1)$

$x^3 + 5x + 1$ の係数は

$$x^3 + 5x + 1 = 0\, x^4 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1 \cdot 1$$

より $(0, 1, 0, 5, 1)$

次に V はそのままで基底を

$\{1, x+1, x^2-1, x^3, x^4\}$ とする。

この基底に対する $x^4 - 2x^2 + 1$ の係数は

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 2 (x^2 - 1) + 0 (x+1) + (-1) 1$$

$$= x^4 - 2x^2 + 2 - 1$$

より $(1, 0, -2, 0, -1)$

定義 V, W をベクトル空間

$\{v_1 \cdots v_n\}$ $\{w_1 \cdots w_m\}$ 基底

$f : V \longrightarrow W$ 線型写像

f の行列表示とは ⒡ をみたす行列 A のこと。

$w = f(v)$ $v = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ $w = (\beta_1 \cdots \beta_m)$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

例 $V = W =$ 1次以下の多項式

基底 $\{1, x\}$ とする

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g(x) & \longmapsto & g'(x) \end{array}$$ の行列表示は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

実際 $ax+b = b\cdot 1 + a\cdot x$

$$\downarrow$$

$a = a\cdot 1 - 0\cdot x$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

- 表現行列の求め方

Step 1. 基底がどううつるか見る.

Step 2. うつした基底の係数を求める.

Step 3. 係数を列ベクトルに並べたものが求める行列

上の例にあてはめてやってみる.

Step 1. $1 \longmapsto 0$

$x \longmapsto 1$

Step 2. $0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x \longrightarrow (0, 0)$

$1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x \longrightarrow (1, 0)$

Step 3. $\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{転置}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ マチガイ

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← 並べる順番は元の基底の順番

例 $V = W = \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し線型写像を $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定める. 基底 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ に対する表現行列は

Step 1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Step 2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Step 3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$