

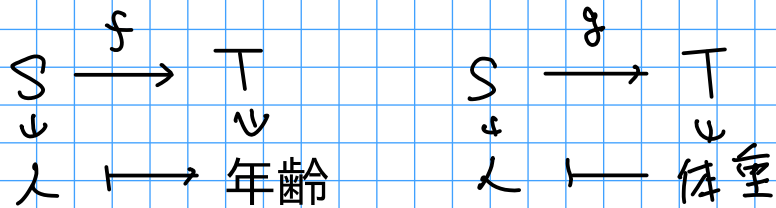
今日の話題.

- 線型写像の定義 ← 今回から教科書 §10
- 線型写像の行列表示

定義 写像.

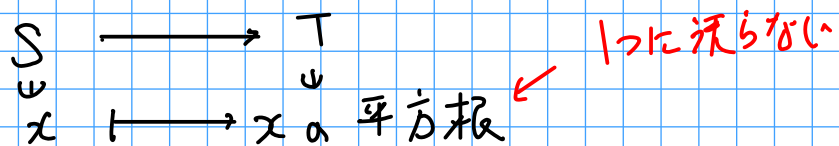
集合 S, T の間の写像とは, S の各元 s に対し 唯一つの T の元 $f(s)$ を割りあてるものである.

例 $S = \{\text{人類}\} \quad T = \mathbb{N}$ (自然数)



次の写像ではない:

$S = T = \mathbb{R}$ (実数)



定義 線型写像

S, T をベクトル空間とする.

写像 $f: S \rightarrow T$ が線型写像とは

(1) $s_1, s_2 \in S$ に対し

$$f(s_1 + s_2) = f(s_1) + f(s_2)$$

(2) α 定数 $s \in S$ に対し

$$f(\alpha s) = \alpha f(s)$$

をみたすことをいう.

例 $S = T = \mathbb{C}[x]$ (\mathbb{C} 係数多項式の集合)

$$\mathbb{C}[x] \xrightarrow{f} \mathbb{C}[x]$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \leftarrow \text{微分したもの.}$$

$$g(x) \mapsto g'(x)$$

$$x^3 \mapsto 3x^2$$

$$2x + 2 \mapsto 2$$

$$x^3 + 2x + 2 \mapsto 3x^2 + 2$$

$$4x^3 \mapsto 12x^2$$

* 線型性とは

(1) 足してから \mapsto でうつしたものの
 \mapsto でうつしてから 足したものと 等しい

(2) () \mapsto でうつしたものの
 \mapsto でうつしてから () したものと 等しい

$g(x) \mapsto g'(x)$ に対しては上の2つの条件が
みたされているので線型写像である。

・線型写像の行列表示

n 次元空間 V とその基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を
固定する。 V の元 w の係数 (座標) とは

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

と書いたときの $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ のこと。

例 $V = \{4$ 次以下の多項式 $\}$

基底 = $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ とする。

$V \ni x^4 - 2x^2 + 1$ の係数は

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1$$

より $(1, 0, -2, 0, 1)$

$x^3 + 5x + 1$ の係数は

$$x^3 + 5x + 1 = 0 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1 \cdot 1$$

より $(0, 1, 0, 5, 1)$

次に V はこの基底で基底を

$\{1, x+1, x^2-1, x^3, x^4\}$ とする。

この基底に対する $x^4 - 2x^2 + 1$ の係数は

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 - 2 \cdot (x^2 - 1) + 0 \cdot (x + 1) + (-1) \cdot 1$$

$$= x^4 - 2x^2 + 2 - 1$$

より $(1, 0, -2, 0, -1)$

定義 V, W を n 次元空間

$\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_m\}$ 基底

$f: V \rightarrow W$ 線型写像

f の行列表示とは f をみたす行列 A が $w = f(v)$

$$w = f(v) \quad v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad w = (\beta_1, \dots, \beta_m)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

例 $V = W = 1$ 次以下 α 多項式

基底 $\{1, x\}$ とする

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ g(x) & \longmapsto & g'(x) \end{array} \quad \text{の行列表示は} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

実際 $ax + b = b \cdot 1 + a \cdot x$

\downarrow

$$a = a \cdot 1 + 0 \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

・表現行列の求め方

Step 1. 基底 W のベクトルを見子.

Step 2. V の基底の係数を求める.

Step 3. 係数を列ベクトルに並べてその行列を求める.

上の例に当てはめてやってみる.

Step 1. $1 \mapsto 0$
 $x \mapsto 1$

Step 2. $0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \rightarrow (0, 0)$

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \rightarrow (1, 0)$$

Step 3. ~~$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$~~ $\xrightarrow{\text{転置}}$ ~~$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$~~ \leftarrow $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ \leftarrow 並べ替える基底の順番

例 $V = W = \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し線型写像 T $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定める. 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ に

対応する表現行列は

Step 1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Step 2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Step 3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$