5/12 復習

V … ベクトル空間

V の 2つの元 v, w に対し

$v+w$ が 定義され $v+w \in V$

定数 α に対し αv が 定義され

$\alpha v \in W$

V の元 $\{v_1 \cdots v_n\}$ が 1次独立 とは

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

$\{v_1 \cdots v_n\}$ が 1次独立でないとき、

1次従属 という。

V の元 $\{v_1 \cdots v_n\}$ が 基底 とは

$\{v_1 \cdots v_n\}$ が 1次独立 かつ

V の任意の元 w が

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

- ベクトルで生成されるベクトル空間

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad 行$$

A の行ベクトル $(1\ 0\ 2\ 4), (1, 1, 1, 4)$ etc.

で生成されるベクトル空間 V とは

$$V = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \right.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ は $\mathbb{R}$ の元 (実数)

V の基底を求めてみよう。一見すると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が基底のように思える。しかし、上の集合

は 1次独立でないかもしれないので、

それを確認しなければならない。

1次独立の条件は

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}7\\4\\10\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

であった

を変形すると、

$$\begin{pmatrix}1&1&2&7\\0&1&0&4\\2&1&4&10\\4&4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

これを $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ について解くと、

$$\begin{pmatrix}1&1&2&7\\0&1&0&4\\0&0&1&25/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&7-4-50/7\\0&1&0&4\\0&0&1&25/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&-29/7\\0&1&0&4\\0&0&1&25/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_1=\frac{29}{7}\alpha_4,\ \alpha_2=-4\alpha_4,\ \alpha_3=-\frac{25}{7}\alpha_4$$

よって線型独立ではない。そこで基底としては別のものをとらなければならないが

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}$$

これを取ると、上の解から

$$\frac{29}{7}\alpha_4\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}-4\alpha_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}-\frac{25}{7}\alpha_4\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}7\\4\\10\\3\end{pmatrix}=0$$

α_4 で割って整理すれば

$$\begin{pmatrix}7\\4\\10\\3\end{pmatrix}=-\frac{29}{7}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}+\frac{25}{7}\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}$$

Vの元は

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}7\\4\\10\\3\end{pmatrix}$$

とかけていた。$\begin{pmatrix}7\\4\\10\\3\end{pmatrix}$ に先の式を代入すれば

上の元は

$$\beta_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}+\beta_3\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}$$

とかける。そこで次の基底の候補としては

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}$$

があげられる。これが1次独立かどうかは

$$\beta_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}+\beta_3\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&1&4\\4&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解けば良い。

$$\begin{pmatrix}1&1&2&\cancel{7}\\0&1&0&\cancel{4}\\0&0&1&\cancel{25/7}\\0&0&0&\cancel{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cancel{\alpha_1}\ \beta_1\\\cancel{\alpha_2}\ \beta_2\\\cancel{\alpha_3}\ \beta_3\\\cancel{\alpha_4}\end{pmatrix}=0$$

2行と3行から $\beta_2=\beta_3=0$

これと1行目から $\beta_1=0$ となる。

よって $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}$ は1次独立

で基底となる。

- 次元

平面…2次元　空間…3次元

という素朴な印象は皆持っている。

定義　Vの次元とは1次独立な元の個数

$\{v_1\cdots v_n\}$ の最大値のことである。

例 $\mathbb{R}^3$ (座標空間) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\because$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は基底

$\dim \mathbb{R}^3 \geq 3.$

これが $=$ であることを示すときに考えなければならないのは

$$\begin{pmatrix} \log 2 \\ \pi \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \log 3 \\ e \\ \sqrt[4]{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \cdots$$

変な数を成分にもつベクトルを取れば4つ以上の1次独立なベクトルがあるかもしれない!

解答 背理法で示す. $\{v_1 \cdots v_4\}$ 1次独立なものがあったとする.

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}$$ とする.

すると,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$$

$$\iff \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + \cdots \alpha_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & \cdots & & \\ a_{31} & & & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3行4列の行列

一般に $Ax = 0$ (A 行列 $n \times m$)

$n < m$ であれば $x \neq 0$ となる解がある.

これから上の方程式は $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ 以外の解をもち, これは仮定に反する.

- 与えられた基底に関する表現

Q ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を

(1) 基底 $(2\ 1)\ (1\ 2)$

(2) $(1\ \ 1)\ (1\ -1)$

で表わしたときの係数を求めよ.

A. (1) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

a_1 と a_2 を求めれば良い.

上の式は

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$ を左からかければ

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ を左からかけて

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$ //