6/16 中間試験

ノート，コピー，教科書 持ち込み可

6/2，6/9 のプリントの問題 ＋ α

復習

ベクトル空間 V の基底とは

V の部分集合 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ で

1) 1次独立

2) V の任意の元 w は

$$w = \sum a_i v_i$$

とかける．（a_i は定数）

問．$\mathbb{R}$ 2次以下の多項式

以下の集合は基底となるか？

(1) $\{1, x, x^2\}$

(2) $\{1, x\}$ (3) $1, 2x, x^2-1$

(1) 1次独立性

$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 = 0$ とする．

このとき，

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 = 0$$ 恒等式

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ O.K.

もう1つの条件を確認する

2次以下の多項式は $b_1 + b_2 x + b_3 x^2$

とかける．よって

$$b_1 + b_2 x + b_3 x^2 = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot x^2$$

とかける．以上から $\{1, x, x^2\}$ は基底

(2) 1次独立性．

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x = a_1 + a_2 x = 0$$

$a_1 = a_2 = 0$ よって 1次独立

しかし x^2 は $b_1 + b_2 x$ の形で

表すことはできない．よって 基底ではない．

(3) 1次独立性

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2x + a_3(x^2-1) = 0$$

$$\iff a_1 - a_3 + 2a_2 x + a_3 x^2 = 0$$

よって $a_1 - a_3 = 2a_2 = a_3 = 0$

これから $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 1次独立

次に 2次以下の多項式 $b_1 + b_2 x + b_3 x^2$ が書けるかどうか確かめる.

$$b_1 + b_2 x + b_3 x^2 = a_1 \cdot 1 + 2a_2 \cdot x + a_3(x^2-1)$$

これが恒等式となるような a_1, a_2, a_3 が存在すればよい. 上式を変形して

$$b_1 + b_2 x + b_3 x^2 = a_1 - a_3 + 2a_2 x + a_3 x^2$$

よって $a_3 = b_3$, $2a_2 = b_2$, $a_1 - a_3 = b_1$

整理して $a_1 = b_1 + b_3$ $a_2 = \frac{1}{2}b_2$, $a_3 = b_3$

とおけば 上の式は恒等式となる. 以上より

基底

問2 R 3次以下の多項式の集合

写像 $R \ni f(x) \longmapsto f'(x) \in R$

の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する表現行列

をもとめよ.

解 まず基底の元がどのようにうつされるか

を見る.

$$1 \longmapsto 0$$
$$x \longmapsto 1$$
$$x^2 \longmapsto 2x$$
$$x^3 \longmapsto 3x^2$$

次にうつされた元が基底でどのように表せるか

を見る.

$$0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

最後に基底で表したものを列ベクトル

とする行列が，求めるものである．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

※何故横のものを縦にするのか？

→ Rの元を縦ベクトルと同一視するため

$$R \ni a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

これを $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ と同一視する．

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_3 \\ 3a_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上の右辺は $a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 + 0 \cdot x^3$

$$= a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

これは $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ を

微分したもの．すなわち，微分する，ということが行列とベクトルの積で表現されている．