今日と，来週 はじめの30分は 線型代数の一番の難所

- ケーリー ハミルトンの 定理，
- Jordan 標準形

• 行列の3角化

A $n\times n$ 行列

$\det(xI-A)=0$ の 解を $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ とおく。

すると ある行列 P があり，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

対角線の下は全て0

この事実を証明するために，次のことを確認する。

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

$n\times n$ 行列

b 1行 $n-1$ 列

A' $n-1$行 $n-1$列

0 $n-1$行 1列 の 0 行列

$= a \det A'$

これは行列式の定義を思いおこすと，

$\det M = \sum (\pm 1)$ {各行，各列から 1つずつ要素を えらんでかけあわせる。}

特に $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$ では 1列から 1行目以外をえらんでかけたものは 0 となるので

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix} = \sum(\pm 1)$ {1行1列, $2\sim n-1$ 行, $2\sim n-1$ 列 から1つずつ えらんでかけあわせたもの。}

$= a \det A'$

さて，行列の3角化の話に戻る。

$\det(\alpha_1 I-A)=0$ より $(A-\alpha I)\vec{p_1}=\vec{0}$

をみたす 列ベクトル $\vec{p_1}$ が存在する。$\vec{p_1}$ を含む

基底 $\{\vec{p_1}\ \vec{p_2} \cdots \vec{p_n}\}$ を取る。

$P=(\vec{p_1} \cdots \vec{p_n})$ とおく。すると P^{-1} が存在する。

こうして作った P, P^{-1} に対し

$$P^{-1}AP = P^{-1}(A\vec{p_1} \cdots A\vec{p_n})$$

$$= P^{-1}(\alpha_1\vec{p_1} \ A\vec{p_2} \cdots A\vec{p_n})$$

$I_n = P^{-1}P = P^{-1}(\vec{p_1} \cdots \vec{p_n})$ より $P^{-1}\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

つまり $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & b \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$

2列目より後ろは良くわからないので別の記号 b, A' でおきかえた.

ここで $\det(xI_n - A) = \det(xI_n - P^{-1}AP)$

$xI_n - P^{-1}AP = \begin{pmatrix} x-\alpha_1 & b \\ 0 & \\ \vdots & xI_{n-1} - A' \\ 0 & \end{pmatrix}$ なので

$\det(xI_n - A) = (x-\alpha_1)\det(xI_{n-1} - A')$

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ を解にもつ $\Rightarrow$ $\alpha_2 \cdots \alpha_n$ を解にもつ.

よってこれまでと同様の議論で P_2' ($n-1 \times n-1$ 行列)

$$P_2'^{-1}A'P_2' = \begin{pmatrix} \alpha_2 & b' \\ 0 & \\ \vdots & A'' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P_2' \\ 0 & \end{pmatrix}$ とすると

$$P_2^{-1}P^{-1}APP_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & b \\ 0 & \alpha_2 & b' \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & A'' \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

以下くり返すことで

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$ とできる.

Thm (ケーリー・ハミルトン)

$f(x) = \det(xI - A) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$

とすると $f(A) = O$

ありがちな誤証明

$f(A) = \det(A \cdot I - A) = \det O = 0$

まず $f(A) = (A-\alpha_1 I)\cdots(A-\alpha_n I)$

$$f(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP-\alpha_1 I)\cdots(P^{-1}AP-\alpha_n I)$$

に対し $P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP)$ であることに

注意. 実際

$$f(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP-\alpha_1 P^{-1}P)(P^{-1}AP-\alpha_2 P^{-1}P)\cdots(P^{-1}AP-\alpha_n P^{-1}P)$$

$$= P^{-1}(A-\alpha_1 I)PP^{-1}(A-\alpha_2 I)P\cdots P^{-1}(A-\alpha_n I)P$$

$$= P^{-1}(A-\alpha_1 I)\cdots(A-\alpha_n I)P$$

適当な P を取れば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$ となる.

この P に対して $f(P^{-1}AP)$ を考えれば

$$P^{-1}AP - \alpha_k I = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$ k行k列が0

これを念頭におき

$P^{-1}AP - \alpha_n I \leftarrow$ n行が全て0

$(P^{-1}AP-\alpha_{n-1}I)(P^{-1}AP-\alpha_n I)$

n行目は全て0.

n−1行目は全て0.

(教科書 p166 を参照のこと.)

同様に考えて

$(P^{-1}AP-\alpha_k I)\cdots(P^{-1}AP-\alpha_n I)$

k〜n行目は全0

つまり

$$f(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP-\alpha_1 I)\cdots(P^{-1}AP-\alpha_n I) = O$$

$$f(A) = Pf(P^{-1}AP)P^{-1} = POP^{-1} = O$$

例題

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする. A^3 を求めよ.

$\det(xI - A) = x^3 - 5x + 3$ となる.

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^3 - 5A + 3I = O$$

$$A^3 = 5A - 3I = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & & O \\ & -3 & \\ O & & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & -13 \end{pmatrix}$$

例題　$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.　B^n を求めよ.

$$\det(xI - B) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

ケーリー・ハミルトンの定理から　$B^2 - 3B + 2I = O$

ここで

$$x^n = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

とおけるが　上式に $x = 1, 2$ を代入すれば

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a + b \\ 2^n &= 2a + b \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a &= 2^n - 1 \\ b &= 2 - 2^n \end{aligned}$$

よって

$$x^n = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + (2^n - 1)x + (2 - 2^n)$$

この式に B を代入すれば

$$B^n = \underbrace{(B^2 - 3B + 2I)}_{=O}Q(B) + (2^n - 1)B + (2 - 2^n)I$$

$$= (2^n - 1)B + (2 - 2^n)I$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ //

行列はいつ対角化できるか?

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　どのような P を取っても

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ とはできない.

定義　行列 A に対し,　A の固有値を α とおく.
α に関する固有空間とは,

$$V_\alpha = \{ \vec{x} \text{ ベクトル} \mid A\vec{x} = \alpha\vec{x} \}$$

V_α はベクトル空間となる.

Th. 行列 A の相異なる固有値を $\alpha_1 \cdots \alpha_n$

とおく.

A が対角化できる (i.e. ある P があり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_1 & & \\ & & & \alpha_2 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$ とできる.)

のは

$$\dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_n} = (A \text{の行の数})$$

であることが必要十分.

∵ $\dim V_{\alpha_1} + \cdots + \dim V_{\alpha_n} = (A \text{の行の数})$

であるとき, A が対角化できることを示す.

各 V_{α_i} から $\dim V_{\alpha_i}$ 個からなる基底が

取れる. これを $\vec{p}_{i1} \cdots \vec{p}_{ik_i}$ $k_i = \dim V_{\alpha_i}$

とおく.

$$P = (\vec{p}_{11} \cdots \vec{p}_{1k_1}\ \vec{p}_{21} \cdots \vec{p}_{2k_2} \cdots \vec{p}_{nk_n})$$

とおく. 仮定から P^{-1} が存在する.

$$P^{-1}AP = P^{-1}(A\vec{p}_{11} \cdots A\vec{p}_{nk_n})$$

$$= P^{-1}(\alpha_1\vec{p}_{11} \cdots \alpha_n\vec{p}_{nk_n})$$

$$P^{-1}(\vec{p}_{11} \cdots \vec{p}_{nk_n}) = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$