6/16 中間テスト.

予告問題.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$ を適切な行列 P

をえらび

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

(対角行列)

とせよ.

Step 1. Aの固有値を求める.

方程式 $\det(xE - A) = 0$ を書き下す.

$$\det \begin{pmatrix} x-6 & 3 & 7 \\ 1 & x-2 & -1 \\ -5 & 3 & x+6 \end{pmatrix} = 0$$

$$= (x-6)(x-2)(x+6) + 3\cdot(-1)\cdot(-5) + 7\cdot 1\cdot 3$$
$$- (x-6)(-1)\cdot 3 - 7\cdot(x-2)\cdot(-5) - (x+6)3\cdot 1$$

$$= x^3 - 2x^2 - 36x + 72 + 36$$
$$+ 35x - 70 - 36$$

$$= x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$= (x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

よって求める固有値は $\pm 1, 2$ 〃

Step 2 固有ベクトルを求める.

Step 1で求めた値に対して x にその値を代入した行列を係数とする連立方程式を考える.

$x=1$ に対して

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 3 & 7 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ -5 & 3 & 1+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式の解は1つではないが，その中で簡単なものをえらぶと（定数倍して成分を整数にすると．）

$(x \ y \ z) = (2 \ 1 \ 1)$

※ 解は1つとは限らない．定数倍しても等しくならない．

$x = -1, 2$ についても同様の計算を行えば

$x = -1$ のとき，$(x, y, z) = (1 \ 0 \ 1)$

2 〃 $= (1 \ -1 \ 1)$

※ 固有値を求めるときに出した方程式

$\det(xE - A) = 0$

$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2 (x-\beta) = 0$

or

$(x-\alpha)^3 = 0$

のような形に変形できたとき．

$$(\alpha E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解は定数倍しても等しくならないものが2つ又は3つありえる．

Step 3.

求めた固有ベクトルを列ベクトルとする行列 P を考える．

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

この P に対して P^{-1} を計算する．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1行と2行のいれかえ.

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ 2行 − 2×1行

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ 3行 − 1行

⋮ 4回このような計算

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

補足.

- 今回 固有値 α に対して求めた固有ベクトル $\vec{x}$ は

$$A \cdot \vec{x} = \alpha \vec{x}$$

をみたす. これを利用して計算ミスなどを確認すると良い.

理由 $(\alpha E - A)\vec{x} = \vec{0}$ より

$$\alpha E \vec{x} = A\vec{x}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha \vec{x} = A\vec{x}$$