期末 8/4 (水) 16:30 ~ 18:00.

A $n\times n$ 行列

$\alpha_1 \cdots \alpha_k$ $\det(xI - A) = 0$ の解.

$V_i = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \alpha_i \vec{x} \}$

重複している解は1つに数えた.

Th. $\sum_{i=1}^{k} \dim V_i = n$ とする. このとき,

ある P $n\times n$ 行列があり,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_k \end{pmatrix} \leftarrow \text{対角行列}$$

それでは $\sum \dim V_i < \dim V$ のときはどのような

ことがおこるのだろうか?

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(xI - A)$
$= (x-2)^2 = 0$
の解は 2 のみ

$V_2 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\vec{x} = 2\vec{x} \}$ は

ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される.

$\dim V_2 = 1 < 2$

この場合どのような 2×2 行列 P を持ってきても

$P^{-1}AP =$ 対角行列

とはできない.

補題. A 2×2 行列とする. また.

$\det(xI - A) = 0$ が重解 α を持つとする.

このときある P 2×2 行列があり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

とできる.

補題 A $n\times n$ 行列

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_k \end{pmatrix} \quad J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

とできる. すぐ斜め上に1が並ぶ形にはできる.

教科書 p170 ~ 175

行列の exp. log

$$\exp x = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

行列 A が nilpotent (べキ零)

$\Longleftrightarrow$ A を何乗かすると O となるとき.

行列 B が unipotent (べキ単)

$\Longleftrightarrow$ $B-I$ がべキ零のとき.

A がべキ零のとき.

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

無限につづかない

B がべキ単のとき,

$$\log B = (B-I) - \frac{1}{2}(B-I)^2 + \frac{1}{3}(B-I)^3 \cdots$$

無限につづかない,

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B - I = A$

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots$$

ここで $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = O$ $A^n = O$ $(n \geqq 4)$

となるので

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2}A^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\log B = B - I - \frac{1}{2}(B-I)^2 + \frac{1}{3}(B-I)^3 \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

内積

V ベクトル空間　V の内積とは V の元 $\vec{a},\vec{b}$

に対し 1つの数値 $\langle \vec{a},\vec{b} \rangle$ を与えるもので、以下の条件を

みたすもの

① $\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = \langle \vec{b},\vec{a} \rangle$

② $\langle \lambda\vec{a},\vec{b} \rangle = \lambda\langle \vec{a},\vec{b} \rangle$

③ $\langle \vec{a}+\vec{b},\vec{c} \rangle = \langle \vec{a},\vec{c} \rangle + \langle \vec{b},\vec{c} \rangle$

④ $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle \geqq 0$

例　$V = \mathbb{R}^2$　$\vec{a} = (a_1, a_2)$　$\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle \vec{a},\vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2$$

特に $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = 1\cdot2 + 1\cdot1 = 3 \qquad \langle \vec{a},\vec{a} \rangle = 1\cdot1 + 1\cdot1 = 2$$

③のみ確認する。

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$　$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$　$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{a}+\vec{b},\vec{c} \rangle = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)\cdot c_2$$

$$\langle \vec{a},\vec{c} \rangle = a_1c_1 + a_2c_2$$

$$\langle \vec{b},\vec{c} \rangle = b_1c_1 + b_2c_2$$

よって $\langle \vec{a}+\vec{b},\vec{c} \rangle = \langle \vec{a},\vec{c} \rangle + \langle \vec{b},\vec{c} \rangle$

例　$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = a_1b_2 + a_2b_1$

特に $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = 1\cdot1 + 1\cdot2 = 3$$

$$\langle \vec{a},\vec{a} \rangle = 1\cdot1 + 1\cdot1 = 2$$

例　$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2$

特に $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle$ $= 2\cdot1\cdot2 + 1\cdot1 = 5$

$\langle \vec{a},\vec{a} \rangle$ $= 2\cdot1\cdot1 + 1\cdot1 = 3$

問2 訂正

内積の①、④が成立するか確認せよ。

例 R 2次以下の多項式 $f(x), g(x) \in R$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

とすると, これは内積となる.

① $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

$\langle g(x), f(x) \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx$ 等しい.

② $\langle \lambda f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \lambda f(x)g(x)\,dx$

$= \lambda \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \lambda \langle f(x), g(x) \rangle$

③ $\langle f(x)+g(x), h(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \{f(x)+g(x)\}h(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx$

$= \langle f(x), h(x) \rangle + \langle g(x), h(x) \rangle$

④ 略.

特に $f(x) = x$ $g(x) = x^2$ のとき,

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

※ 数学で抽象的な定義がされるのは

思考の節約のためである. 内積を例に取れば

内積の具体例はたくさんある. が内積の性質

①〜④ これらのみを使って考えれば, 1つ1つの具体例

にあたらずとも, 様々なことが導ける.

補題 $\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \|\vec{a}\|$ とする.

1) $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leqq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

2) $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leqq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

$\because$ 1) $\langle \lambda\vec{b}-\vec{a}, \lambda\vec{b}-\vec{a} \rangle \geqq 0$ … ④より

$\Leftrightarrow \lambda^2\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\lambda\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \geqq 0$ … ①〜③より

λ についての2次式が常に 0 以上

$\Leftrightarrow$ $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \leqq \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$

2) $\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle \geqq 0$ $\cdots$ ④より

$\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle = \|\vec{a}+\vec{b}\|^2$

$\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \geqq 0$

$\cdots$ ①〜③より

1) より $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leqq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$. これから,

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$\leqq \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$$

$$\| \quad (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

以上から

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leqq (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$