8/4 期末試験　30分以上の遅刻は認めない。

持ち込み（本，プリントアウトしたもの etc.）可。

返却されていない試験等

理学部 3-618 まで来れば返却。

例題。

$\mathbb{C}^3$ の基底

$v_1 = (0, -i, 1)$　$v_2 = (i, 0, -i)$, $v_3 = (1, i, 0)$

から複素内積に関する直交基底を作れ。

解. 次のようなベクトル v_1', v_2', v_3' を求めればよい。

$$v_1' = v_1$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

各式のパーツをまず計算する。

$$\langle v_2, v_1' \rangle = i \times 0 + 0 \times (+i) + (-i) \times 1$$

（v_1' の成分は複素共役を取って足しあわせる。）

$$= -i$$

$$\langle v_1', v_1' \rangle = 0 \times 0 + (-i) \times (+i) + 1 \times 1$$
$$= 0 + 1 + 1 = 2$$

$$v_2' = v_2 - \frac{-i}{2} v_1'$$
$$= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} - \frac{(-i)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

続いて

$$\langle v_3, v_2' \rangle = 1 \times (-i) + i \times \frac{1}{2} + 0 \times \left(\frac{i}{2}\right)$$
$$= -i + \frac{i}{2} = -\frac{i}{2}$$

$$\langle v_2', v_2' \rangle = i \times (-i) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} i\right) \times \frac{1}{2} i$$
$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\langle v_3, v_1' \rangle = 1 \times 0 + i \times i + 0 \times 1$$
$$= -1$$

$$v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{i}{2}}{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} i \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} i \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上で　$v_1' \perp v_2'$, $v_2' \perp v_3'$, $v_3' \perp v_1'$

しかし $\langle v_1', v_1' \rangle$, $\langle v_2', v_2' \rangle$, $\langle v_3', v_3' \rangle$ は皆

1ではない。

例題　$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列を求める。

解. まず A の固有値を求める

$$\det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-3 & 2 & 0 \\ 2 & x-2 & 2 \\ 0 & 2 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-3)(x-2)(x-1) - 4(x-3) - 4(x-1)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 - 8x + 16$$

$$= x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

$$= (x+1)(x^2 - 7x + 10)$$

$$= (x+1)(x-2)(x-5)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 3 & 10 \\ & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

となるので, A の固有値は $-1, 2, 5$.

次に各固有値 α に対して $\alpha I - A$ を考える.

$x = -1$　$xI - A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

上の行列でかけて 0 になる縦ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x = 2$　$xI - A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

上の行列とかけて 0 になる縦ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$x = 5$　$xI - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

上の行列でかけて 0 となるベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

ここで $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

直交行列とは各列が直交し, 又その列ベクトルの長さが 1 であるような行列であった.

ここで

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の長さ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 2^2 + 2^2 = 9$

より $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の長さは 1.

同様に $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ の長さも 1.

これから

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

が 1つの候補となる.

2次形式のシルヴェスター標準型

2変数2次式

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy \quad \cdots ①$$

3変数3次式

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5yz + a_6zx$$
$$\cdots ②$$

$$① = a_1\left(x^2 + \frac{a_3}{a_1}xy\right) + a_2y^2$$
$$= a_1\left(x + \frac{a_3}{2a_1}y\right)^2 + a_2y^2 - \frac{a_3^2}{4a_1}y^2$$
$$= a_1\left(x + \frac{a_3}{2a_1}y\right)^2 + \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4a_1}\right)y^2$$

$a_1 > 0$, $a_2 - \frac{a_3^2}{4a_1} > 0$ のとき.

$$X = \sqrt{a_1}\left(x + \frac{a_3}{2a_1}y\right)$$
$$Y = \left\{\sqrt{a_2 - \frac{a_3^2}{4a_1}}\right\}y \quad \text{とおけば}$$
$$= X^2 + Y^2$$

$a_1 > 0$ $a_2 - \frac{a_3^2}{4a_1} < 0$ のとき

$$X = \sqrt{a_1}\left(x + \frac{a_3}{2a_1}y\right)$$
$$Y = \left\{\sqrt{-\left(a_2 - \frac{a_3^2}{4a_1}\right)}\right\}y \quad \text{とおけば}$$
$$= X^2 - Y^2$$

このように変数をうまくおきかえることで
2変数2次式は

X^2, X^2+Y^2, X^2-Y^2, $-X^2-Y^2$, $-Y^2$

この5つに変形することができる.

3変数では

X^2, Y^2, Z^2, X^2+Y^2, Y^2+Z^2, Z^2+X^2

… $X^2+Y^2+Z^2$, $X^2+Y^2-Z^2$ etc.

つまり X^2, Y^2, Z^2 に係数 $0, \pm 1$ をつけて足しあわせたもの. に変形できる.

この形をシルヴェスターの標準型という.

標準型に対し, $+1$ の係数をもつ項の数
符号 -1 〃
を並べて指数という.

$X^2+Y^2+Z^2 \leftarrow (3, 0)$
$X^2+Y^2-Z^2 \leftarrow (2, 1)$

例題

1) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 5yz$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 4z^2 + 5yz$ 　xに関して整理

$= (x+y)^2 + 4z^2 + 5yz$ 　xに関して平方完成

$= (x+y)^2 + 4\left(z^2 + \frac{5}{4}yz\right)$ 　yがないので zに関して平方完成

$= (x+y)^2 + 4\left\{z^2 + \frac{5}{4}yz + \left(\frac{5}{8}y\right)^2 - \left(\frac{5}{8}y\right)^2\right\}$

$= (x+y)^2 + 4\left(z + \frac{5}{8}y\right)^2 - 4\left(\frac{5}{8}y\right)^2$

$$\left.\begin{aligned} X &= x+y \\ Y &= 2\left(z+\frac{5}{8}y\right) \\ Z &= 2\left(\frac{5}{8}y\right) \end{aligned}\right\} \text{とすれば}$$

$= X^2 + Y^2 - Z^2$ 　符号 $(2, 1)$

2) $xy + 2yz + 2zx$

$x = x' + y'$, $y = x' - y'$ とおく.

$= (x'+y')(x'-y') + 2(x'-y')z + 2(x'+y')z$

$= x'^2 - y'^2 + \cancel{2}4x'z$

$= x'^2 + \cancel{2}4x'z - y'^2$

$= x' + \cancel{2}4x'z + 4z^2 - y'^2 - 4z^2$

$= (x' + 2z)^2 - y'^2 - (2z)^2$

符号 $(1, 2)$