8/4 試験範囲 内積～

持ち込み 可

先週の復習

R : 2次以下の多項式の集合.

$f(x), g(x) \in R$ に対し内積を

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$ と定義する.

基底 $\{1, x, x^2\}$ から (正規) 直交基底を作れ.

解. $v_1 = 1$ $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ とする.

$$v_1' = v_1 = 1$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

を計算すれば良い. 実際にやってみると,

$$V_1' = V_1 = 1$$

$$V_2' = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1$$

$$= x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1\, dx}{\int_0^1 1 \cdot 1\, dx} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$V_3' = x^2 - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1$$

分母分子を別々に計算する.

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1\, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle = \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

まとめて, $V_3' = x^2 - \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$

複素内積 (Hermite 内積)

エルミート

定義 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ (つまり成分が複素数であるベクトルの集合) の複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ とは

① $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$

② $\langle v+u, w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle$

③ $\langle \alpha v, w\rangle = \langle v, \overline{\alpha} w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$

④ $\langle v, v\rangle \geqq 0$

ただし、 $\overline{}$ は複素共役を表す。

例 $\mathbb{C}^2 \ni v = (v_1, v_2)$ $w = (w_1, w_2)$

$\langle v, w\rangle = v_1\overline{w_1} + v_2\overline{w_2} = {}^t v \cdot w$

$v = (1, i)$ i は虚数単位 $i^2 = -1$

$w = (2, i)$

$\langle v, w\rangle = 1\cdot 2 + i(-i) = 2 + 1 = 3$ 複素共役を取った.

$\langle v, v\rangle = 1\cdot 1 + i(-i) = 1 + 1 = 2$

※ v, w が実数のみからなる場合は、普通の内積と同じ。

※ 複素ベクトル空間に普通の内積を定義することはできない。

定理 $\mathbb{C}^n$ の複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対し、以下の不等式が成立する。

1) $\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle \geqq |\langle v, w\rangle|^2$

2) $\langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle \geqq \langle v+w, v+w\rangle$

∵ 1) $\langle tv + w, tv + w\rangle$ を計算する. ~~(tは実数)~~

t は $t\langle v, w\rangle$ が実数となる数

$\langle tv + w, tv + w\rangle$

$= \langle tv, tv + w\rangle + \langle w, tv + w\rangle$

$= \langle tv, tv\rangle + \langle tv, w\rangle + \langle w, tv\rangle + \langle w, w\rangle$

$= |t|^2\langle v, \overset{v}{\cancel{w}}\rangle + t\langle v, w\rangle + \overline{t}\langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle$

$= t^2\langle v, \overset{v}{\cancel{w}}\rangle + 2t\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$

t のかわりに λ 実数に対し λt を入れて

$\langle \lambda t v + w, \lambda t v + w\rangle \geqq 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2|t|^2\langle v, v\rangle + 2\lambda t\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \geqq 0$

よって $D/4 : \{t\langle v, w\rangle\}^2 - |t|^2\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle \geqq 0$

$\{t\langle v, w\rangle\}^2 = |t|^2|\langle v, w\rangle|^2$

これから $|\langle v, w\rangle|^2 \leqq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$ 〃

問2の修正

誤

$$\langle v+w,\ v+w\rangle \leqq \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle$$

正

$$\sqrt{\langle v+w,\ v+w\rangle} \leqq \sqrt{\langle v,v\rangle} + \sqrt{\langle w,w\rangle}$$

両辺を2乗した。

$$\langle v+w,\ v+w\rangle \leqq \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + 2\sqrt{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle}$$

を示せば良い，まず左辺を展開し，続いて1)の不等式を利用せよ。

対称行列の対角化

定義 直交行列

$n\times n$ 実行列（成分が実数）P が直交行列とは

$${}^tP\cdot P = I \leftarrow （単位行列）$$

補題

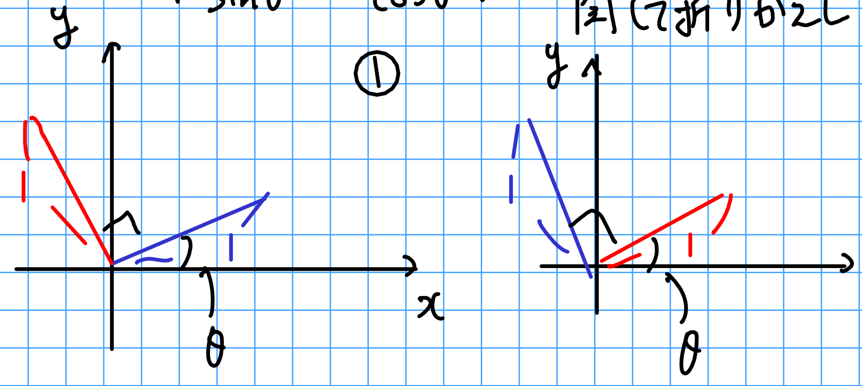
P の列 or 行ベクトルの集合は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなす。

例 $n=2$ のとき

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$ θ回転 … ①

or

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$ $y=\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関して折りかえし。 … ②



定理 実対称行列（${}^tA = A$）は直交行列 P を用いて

$${}^tPAP = 対角行列$$

とできる。

例 $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$ に対して ${}^tPAP$ 対角

となる直交行列 P を求める.

まず方程式 $\det(xI-A)=0$ を解く.

上の A に対しては,

$\det(xI-A) = (x-3)^2(x-6)=0$

$x=6$ のとき

$6I-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

これと右からかけて 0 となるベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ がある.

すると $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 固有値 6 の固有ベクトル

$x=3$ のとき.

$3I-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$

右からかけて 0 となるベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

がある.

$P'=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$ とおく.

すると $(P')^{-1}AP'=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

P' から求める P を作る.

P' の各列は直交する. よって各列の長さを

1にすれば各列は正規直交基底をなす.

$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$