8/4 試験 範囲 内積から〜

定義 ベクトル空間 V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ とは
V の元 v_1, v_2 に対してある値 $\langle v_1, v_2\rangle$ を
与えるもので、次の ①〜④ をみたすもの。

① $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_1\rangle$

② $\langle v_1+v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle$

③ λ 定数
$\langle \lambda v_1, v_2\rangle = \lambda\langle v_1, v_2\rangle$

④ $\langle v_1, v_1\rangle \geqq 0.$

行と列をいれかえる.

例 $A = (a_{ij})$ に対し ${}^tA = (a_{ji})$ とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

定義 $A = {}^tA$ つまり対角線に関して対称な行列を対称行列という。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ ← 対称行列ではない。

A 対称行列, x, y 縦ベクトル.

$\langle x, y\rangle = {}^t x A y$

は"ほとんど"の場合内積になる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ {}^t x A y = (1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

② のみ確かめる.

$$\langle v_1+v_2, v_3\rangle = {}^t(v_1+v_2)Av_3 = ({}^tv_1 + {}^tv_2)Av_3 = {}^tv_1Av_3 + {}^tv_2Av_3 = \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の内積は

$$(1\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

※ ベクトル v_1, v_2 が内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して直交するとは $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ のとき.

定理　全ての内積に対し、ある対称行列 A があり

$$\langle v_1, v_2 \rangle = {}^t v_1 A v_2$$

※　任意の対称行列 A に対して内積が定まるわけではない。例として $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$(1\ -1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

証明のかわりに例を示す。

R　2次以下の多項式　R の基底 $\{1, x, x^2\}$

R の内積を

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx. \quad とする.$$

R の基底から2つずつ選んで内積を求める。
(重複を許す)

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \cdot dx = 2$$

$$\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

A の1行目

$$\langle x, x \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

A の2行目

$$\langle x^2, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$$

A の3行目

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

対称行列なので、A の対角線の上側だけ求めれば良い。

$$\langle 1+x, 1-x \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x)(1+x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

$1+x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$1-x = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot x + 0 \cdot x^2$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

一致する!

$$(1\ 1\ 0)A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(2\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}$$

一般の内積に対して A は次のようにして計算できる.

① V の基底を1つ取る.

② 基底を $\{v_1 \cdots v_n\}$ としたとき

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle \text{ とする.}$$

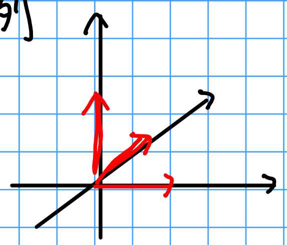
③ A は (i,j) 成分が a_{ij} となるように取れば良い.

・正規直交基底

定義 V の基底 $\{v_1 \cdots v_n\}$ が 正規直交基底 (Ortho Normal Basis) ONB とは,

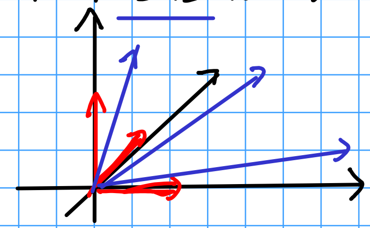
$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

例



$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は ONB.

ただの基底はこれが少しねじれた



この"ねじれ"を解消し, 与えられた基底から ONB を作る方法が Schmid の直交化と呼ばれるものである. そのやり方は

$\{v_1 \cdots v_n\}$ 与えられた基底

$$v_1' = v_1$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$v_4' = v_4 - \frac{\langle v_4, v_3' \rangle}{\langle v_3', v_3' \rangle} v_3' - \frac{\langle v_4, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_4, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$\vdots$$

このように $\{v_1' \cdots v_n'\}$ を定めると、

$$\langle v_2', v_1' \rangle = \left\langle \left(v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \right), v_1 \right\rangle \qquad (v_1 = v_1')$$

$$= \langle v_2, v_1 \rangle - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$= \langle v_2, v_1 \rangle - \langle v_2, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_3', v_2' \rangle = \left\langle v_3 - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 , v_2' \right\rangle$$

$$= \langle v_3, v_2' \rangle - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} \langle v_2', v_2' \rangle - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\langle v_1, v_2' \rangle}}$$

$$= \langle v_3, v_2' \rangle - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} \langle v_2', v_2' \rangle$$

$$= \langle v_3, v_2' \rangle - \langle v_3, v_2' \rangle = 0$$

$$\langle v_3', v_1' \rangle = 0$$

例 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

のときに Schmid の直交化を適用する。

$$v_1' = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-1+1}{1+1+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{6}{9}} \cdot \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{1 + 1 + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$