今日の話題

1. 集合

2. ベクトル空間

3. 1次独立，1次従属

成績評価

2回の試験 + { 毎回のプリントの提出状況 }

6/16 1回目

8/4 2回目（？）

§1. 集合

定義　集合とはものの集まり

例　$\mathbb{Z}$ ← Z をずらして2つ並べたもの.

…整数の集合（集まり）

$\mathbb{Q}$　Qの左側に縦線を入れたもの.

…有理数の集合

$\mathbb{R}$　実数の集合

$\mathbb{C}$　複素数の集合

定義　集合の元とは集合の要素のこと.

例　$2, 3, \cdots$　$\mathbb{Z}$の元

$\frac{1}{3}$　$\frac{5}{8}$　…　$\mathbb{Q}$の元

π, e　…　$\mathbb{R}$の元

$1+i$　…　$\mathbb{C}$の元

集合を定義する時，次のような記法を使う.

偶数の集合 $= \{2, 4, 6, 8 \cdots\}$

元を並べる.

$= \{n \in \mathbb{Z} \mid 2|n\}$

$a|b$ aはbを割り切る.

2番目の書き方は

$\{ \quad | \quad \}$

考える集合はどの集合の元からなるか，を書く.

前の元がみたす条件を書く.

3で割って1余る集合

$= \{n \in \mathbb{Z} \mid 3|(n-1)\}$

集合はしばしば大文字

A, B, S, T etc.

集合の元は小文字

a, b, s, t etc

a が集合Aの元であるとき，

$a \in A$

集合A, BがありAがBに含まれる.

とき $A \subset B$ と書く.

さらにA, B 2つ集合があったとき，

$A \cap B = \{a \in A \mid a \in B\}$

$= \{b \in B \mid b \in A\}$

$A \cup B = \{$AとBの元を全てあわせた集合$\}$

§2. ベクトル空間

定義　集合 V が ベクトル空間 とは

V の元 v, w に対し,

1) $v+w$ が 定義され また

V の元になる.

2) 実数 r に対し rv が 定義され

V の元になる.

という 2つの元を 満たすとき, V はベクトル

空間という.

例　$V = \mathbb{R}^2$ (座標平面)

V の元は 2つの 実数の組であらわせる

$(0,0)$ $(1,0)$, $(0,2)$ etc.

2つの元 (a, b), (c, d) に対し

$(a, b) + (c, d) = (a+b, c+d)$

又 実数 r に対し

$r(a, b) = (ra, rb)$

と定めれば

$(a+b, c+d) \in \mathbb{R}^2$, $(ra, rb) \in \mathbb{R}^2$

となるので $\mathbb{R}^2$ は ベクトル空間

例　$V = \{x$ を変数とする多項式$\}$

$V \ni f(x), g(x)$ に対し

$f(x) + g(x)$ 多項式

r 実数に対して

$rf(x)$ 多項式

よって V は ベクトル空間

例 $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$x+y \geq 0$ なので $x+y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

しかし $r<0$ に対し

$rx < 0$ なので $rx \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$

よって $\mathbb{R}_{\geq 0}$ はベクトル空間でない.

例 $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し

$$x + y := x \cdot y$$

又 実数 r に対して

$r \cdot x := x^r$ と定義する.

このとき, $x+y > 0$

実態は $x \cdot y$

$rx > 0$ なので $\mathbb{R}_{>0}$ は

実態は x^r

ベクトル空間.

例 $\mathbb{R}^3$ (空間) の部分集合 V

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

はベクトル空間

何故なら $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば

$$v \in V \iff Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $v, w \in V$ を取ると

$$Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A(v+w) = Av + Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v + w \in V$$

又 r 実数に対し $A(rv) = rAv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

すなわち $v+w,\ rv \in V$.

以上の例でわかるように，ベクトル空間の例は非常にたくさんある．が，ベクトル空間という抽象的な概念を扱うことでこれらの例を統一的に扱うことができる．その結果，多方面に応用がある．

§3. 1次独立，1次従属

定義　ベクトル空間 V の元 $v_1, \cdots, v_n$ が1次独立とは

イメージがわかない場合 (a, b) などの横ベクトルの集合を考えると良い．

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

であることである．

例　2つの成分からなる横ベクトル $(1, 0)$ $(1, 1)$ は1次独立．なぜなら

$$a_1(1, 0) + a_2(1, 1) = (0, 0)$$

$$\Longleftrightarrow (a_1 + a_2, a_2) = (0, 0)$$

$$\Longleftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

例　3つの成分からなる横ベクトル $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ は1次独立

なぜなら，

$$a_1(1, 0, 0) + a_2(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Longleftrightarrow (a_1 + a_2, 0, a_2) = (0, 0, 0)$$

$$\Longleftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

又 $(1, 0, 1)$, $(2, 0, 1)$ も1次独立

$(2, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ 〃

しかし $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 0, 1)$ は1次独立ではない．

実際.

$1\cdot(1,0,0)+1(1,0,1)+(-1)\cdot(2,0,1)$
$=(0,0,0)$

となる.

例 V 多項式の集合

$1,\ x,\ x^2$ は1次独立.

なぜなら

$a_1\cdot 1+a_2\cdot x+a_3\cdot x^2=0$

恒等式の意味

$\Longleftrightarrow\quad a_1=a_2=a_3=0$

$1,\ 1-x^2,\ x^2$ は1次独立ではない

$1+(-1)(1-x^2)+(-1)\cdot x^2=0$

問題訂正 問4 1次独立でないことを示せ.

§4 次元.

ベクトル空間 V の何らかの意味で"測る"ものさしとして V の次元がある.

定義 V の次元 (dim V) とは

V に含まれる1次独立な元の最大個数

例 $V=\mathbb{R}^2$ (横ベクトルの集合)

$(1,0),\ (0,1)\in V$
は1次独立.

$(1,0),\ (0,1)$ にもう一個 $(a,b)\in V$

を加えると1次独立ではない.

$(-a)(1,0)+(-b)(1,0)+1\cdot(a,b)=(0,0)$

よって1次独立な元の最大個数は 2.(?)

すなわち $\dim V=2$.

例 V 多項式の集合

$1, x, x^2, \cdots, x^n$ は n がどんなに大きくても 1次独立. なぜなら

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

恒等式の イミ

$$\Longleftrightarrow \quad a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

このような場合 $\dim V = \infty$ と定める.

このノートは
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/lecture/2009/linear_algebra/index.html
から pdf file がダウンロード出来ます.