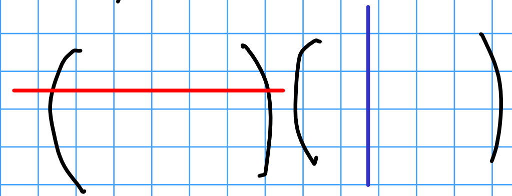
問 1.

(1)
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot(-1)\\ 3\cdot(-1)+4\cdot1 & 3\cdot1+4\cdot(-1)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1+2 & 1-2\\ -3+4 & 3-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot3\\ 4\cdot1+5\cdot(-1)+6\cdot0 & 4\cdot0+5\cdot2+6\cdot3\\ 7\cdot1+8\cdot(-1)+9\cdot0 & 7\cdot0+8\cdot2+9\cdot3\end{pmatrix}$$
$16+27$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 13\\ -1 & 28\\ -1 & 43\end{pmatrix}$$

※ 行列の積は

行と列の内積



すなわち赤と青の線分に沿って成分を書けあわせる。列の数と行の数が異なる場合は積は定義できない

$$\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$ ← 積はない

問2.

行列を標準化する。（階段行列に直す。）

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -9 & 1 & -6\\ 0 & 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

2行 + 1行 × (−3)

3行 + 1行

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2行目 × $-\frac{1}{9}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1行 + 2行 × (−3)
3行 + 2行 × (−3)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{1}{12} + \frac{8}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

求める階数は 3

※ 計算の途中で 行に別の行を足して いるが，これは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$ これを右からかけると
1行 + 3行 × a

のように実際は右から適当な形の行列をかけていることに注意

問3

行列式の求め方

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

右斜め下　　右斜め下

= (赤の線に沿ってかけあわせたもの)
− (青　　　〃　　　)

(2)
$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$
$$= 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8$$
$$- (1\cdot6\cdot8 + 2\cdot4\cdot9 + 3\cdot5\cdot7)$$
$$= 45 + 84 + 96$$
$$- 48 - 72 - 105$$
$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

※ 4次以上の正方行列に対しては行列式を計算する覚えやすい公式はない。実際の計算には

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

に対し

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} \cdots (-1)^{n-1} a_{1n}\det A_{1n}$$

但し
$$A_{1j} = \begin{pmatrix}a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Aから1行, j列を取って作った

$(n-1)\times(n-1)$ 行列

この式を3×3行列で見ると

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix} \quad \det A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{33}$$

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

左の部分の積が

(1)

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^3(x+3)$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x+3)$$

$$= x^4 - 6x^2 + 8x - 3$$

公式を使って上の式を確かめる

$$\det\left(\quad \right) = x \det(1行1列を抜いたもの)$$

$$- 1 \cdot \det(1行2列 \qquad)$$

$$+ 1 \cdot \det(1行3列 \qquad)$$

$$- 1 \cdot \det(1行4列 \qquad)$$

$\det(1行1列 \cdots)$

$$= \det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^2(x+2)$$

$$= x^3 - 3x^{\cancel{2}} + 2$$

$\det(1行2列 \cdots)$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1 + 1 - x - x - 1$$

$$= x^2 - 2x + 1$$

$\det(1行3列 \cdots)$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = x + x + 1 - 1 - x^2 - 1$$

$$= -x^2 + 2x - 1$$

$\det(1行4列 \cdots)$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1$$

あわせると

$$x(x^3 - 3x^{\cancel{2}} + 2) - (x^2 - 2x + 1)$$

$$+ (-x^2 + 2x - 1) - (x^2 - 2x + 1)$$

$$= x^4 - 3x^{\cancel{3}\,2} + 2x - 3x^2 + 6x - 3$$

$$= x^4 - 6x^2 + 8x - 3$$

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/lecture/2009/linear_algebra/index.html