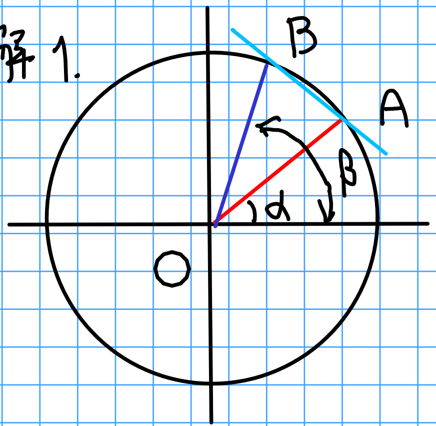
11/26(水)

3角関数の加法定理.

解1.



単位円上の点 A,B

を

A$(\cos\alpha, \sin\alpha)$

B$(\cos\beta, \sin\beta)$

と取る. ABの長さは余弦定理より

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA\,OB\cos(\alpha-\beta)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

一方

$$AB^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta$$
$$+ \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

2つの式から,

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

β で微分して

$$\sin(\alpha-\beta) = -\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

β を $-\beta$ におきかえると

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

解2. 解1の設定のもとで内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を考える.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\cdot OB\cdot\cos(\beta-\alpha)$$
$$= \cos(\beta-\alpha)$$

一方

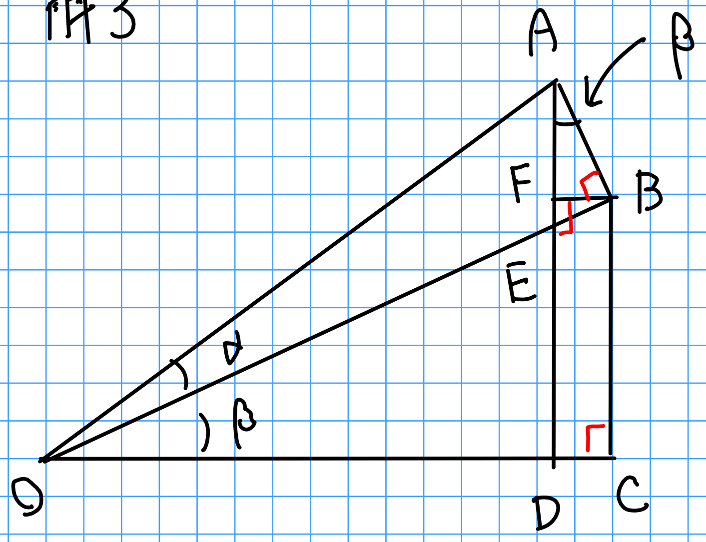
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

よって

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

後は解1と同じ.

解3



$OA = 1$

$\angle AOB = \alpha$

$\angle BOC = \beta$

$\angle ABO = 90^\circ$

$\angle BCO = 90^\circ$

$\angle BFE = 90^\circ$

とする。すると

$AD = \sin(\alpha+\beta)$, $OD = \cos(\alpha+\beta)$

又 $OB = \cos\alpha$ なので

$OC = \cos\alpha\cos\beta$

一方 $AB = \sin\alpha$ であり

$\triangle ODE \backsim \triangle ABE$

より $\angle BAF = \beta$。これから

$CD = BF = \sin\alpha\sin\beta$

よって

$OD = \cos(\alpha+\beta) = OC - CD$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

又

$\sin(\alpha+\beta) = AF + FD$

$= AF + BC$

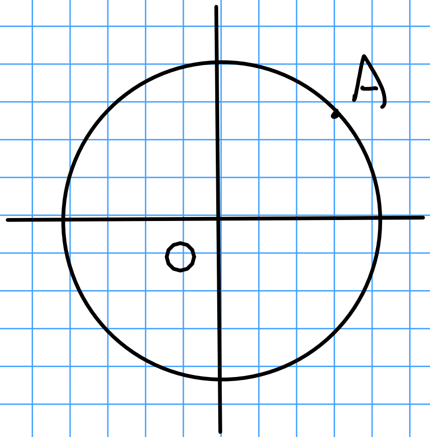
$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

解4.

原点のまわりにθ回転する運動は1次変換で書くことができ、その表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。



$A(\cos\alpha, \sin\beta)$ を原点中心に β だけ回転させたものを B とすれば

$B(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$

一方 Bの座標は,

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

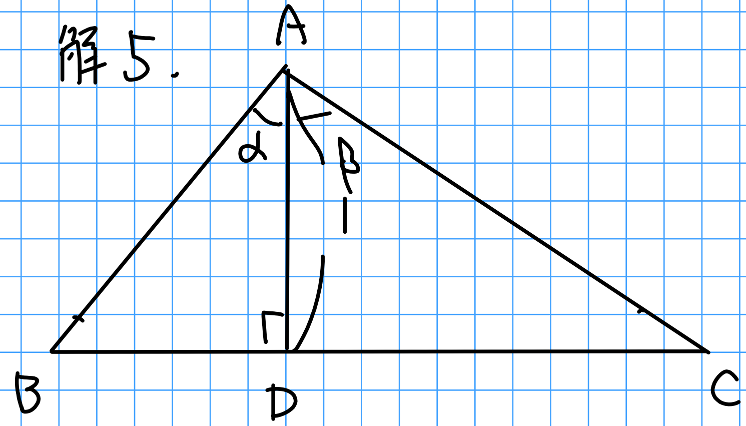
となるので, 比較して

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$

となる.

解5.



上のように 2つの直角3角形を組み合わせた図を考える.

$\triangle ABC$の面積 $= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin(\alpha+\beta)$

$AB = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\quad AC = \frac{1}{\cos\beta}$

なので

$\triangle ABC$の面積

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\beta} \sin(\alpha+\beta)$

一方 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$

と分けて面積を計算すると

$$\triangle ABD = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\alpha}\sin\alpha$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\beta}\sin\beta$$

となるので

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\alpha}\frac{1}{\cos\beta}\sin(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\alpha}\sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\beta}\sin\beta$$

両辺に $2\cos\alpha\cos\beta$ をかけて,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \;〃$$