

中間レポート問題

提出期限 2008 年 12 月 8 日 17:00

高等教育機能開発総合センター一階レポートボックス

問題 1. 次の広義積分が収束する p, q の範囲を求めよ.

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

問題 2. A 君は次の定積分を計算しようとしていた.

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} dt$$

なんとなく変数を $x = \cos t$ とおいてみたところ, 置換積分の公式からは,

$$\int_1^{-1} \sqrt{2-2x} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

となり, 一見複雑となった, が, 積分範囲が 1 から 1 なので, 中の関数が何であっても積分の値は 0 ではないか? という疑問がわいた. 一方この定積分の値はある曲線の長さとなるので, 0 となるのはおかしい. M 先生に相談したところ, 彼は別の事象に気を取られているらしく, まともな答がかえってこなかった. そこで, A 君が納得する答を皆で考えてもらいたい.

問題 3. 次の不定積分を求めよ.

$$\int \sqrt{1-4x^2} dx$$

問題 4. 関数 $y = f(x)$ が区間 $[a, b]$ で $x = c$ のみで不連続である場合, 広義積分を以下のように定義する.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon'}^b f(x) dx$$

この定義に基づき, 以下の広義積分を求めよ.

$$\int_0^4 [x] dx$$

ただし, 実数 x に対し, x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す