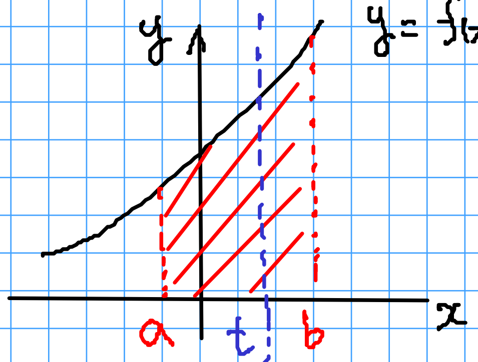
2008/10/08 (水)

・微積分の基本定理.

関数 $y=f(x)$ は 連続かつ単調増加とする.



$\left.\begin{array}{l} x=a,\ b \\ y=f(x) \\ x\text{軸} \end{array}\right\}$ で囲まれた部分の面積を計算してみよう.

この計算のコツは 上の赤の部分のみを考えずに

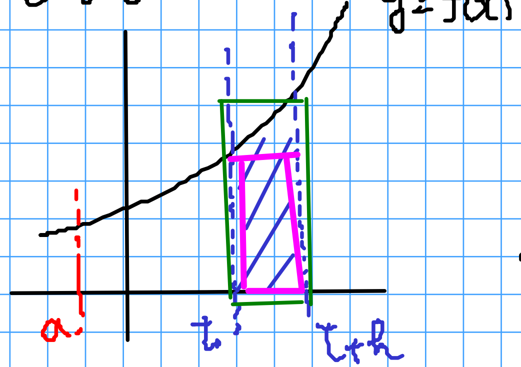
$$x=a,\ t,\ y=f(x),\ x\text{軸}$$

で囲まれた部分の面積を考える所にある. (tは変数) すると この面積は tの関数となるので $S(t)$ と書く. はじめの問題の答は $S(b)$ となる.

さて $h>0$ に対し

$$S(t+h)-S(t)$$

を考える. これは下の図の青の部分の面積となる.



$y=f(x)$ は単調増加なので

$$S(t+h)-S(t) \leqq hf(t+h)$$

一方

$$hf(t) \leqq S(t+h)-S(t)$$

まとめて

$$hf(t) \leqq S(t+h)-S(t) \leqq hf(t+h)$$

hで割って

$$f(t) \leqq \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leqq f(t+h)$$

$h\to 0$ とすると,

$$f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$$

S(t)の導関数

よって 微分すると $f(t)$ になる関数 $F(t)$ を

うまく見つければ、 $F(t) = S(t)$ となる！

・どうやって見つけるか？

$\Rightarrow$ 教科書 p90. その中から、

今回はじめて学ぶものを2つ紹介する。

① 微分すると $\dfrac{1}{1+x^2}$ となる関数

$(\mathrm{Arctan}\, x)'$ を計算する。

$y = \mathrm{Arctan}\, x$ とおくと $x = \tan y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}} \leftarrow \left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)'$$

$$= \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

② 微分すると $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となる関数

$(\mathrm{Arcsin}\, x)'$ を計算する。

$y = \mathrm{Arcsin}\, x$ とおくと、 $x = \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

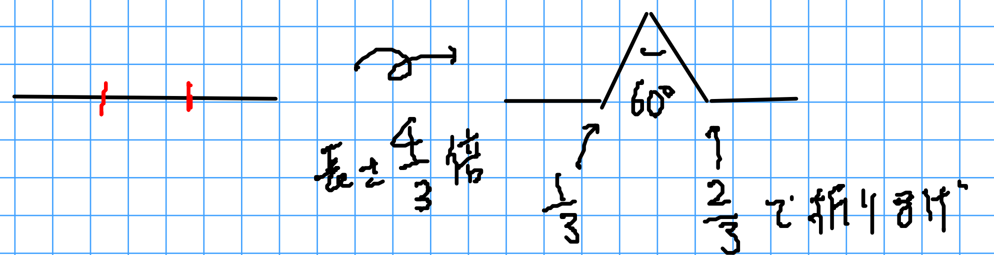
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

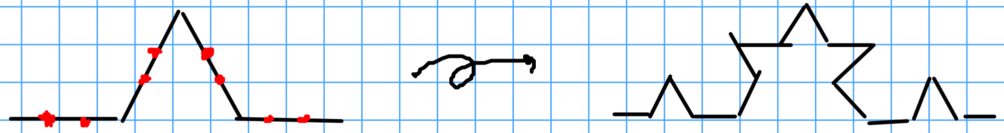
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

一般の場合は ①, ②, p90 の表を組み合せて求める関数を探すことになる。

Digression (より道).

Koch 曲線



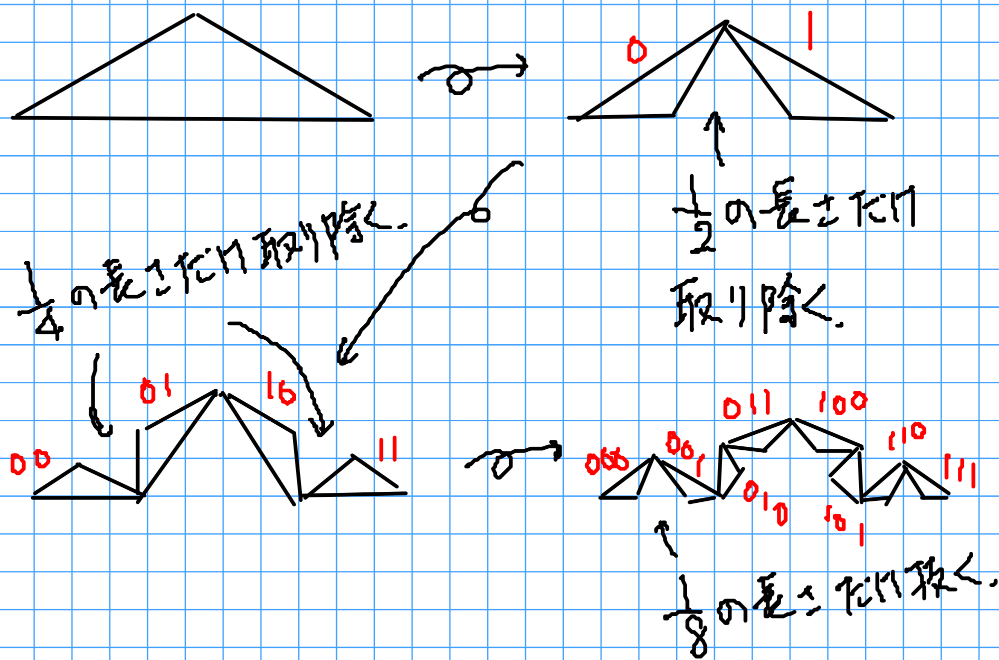


各辺の $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ の所で折りまげ.

この場合も長さが $\frac{4}{3}$ 倍.

この操作を無限に続けた"曲線"の長さは $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$

次に 面積が 0 でない 曲線の例をあげる.



はじめの3角形の面積を 1 とすると

1段階 … $\frac{1}{2}$

2段階 … $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$

3段階 … $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)$

n段階 … $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$

さて、この操作を無限回続けたものを考える.
これは曲線, すなわち 線分と 1対1 対応がある. [0,1] 区間の数 a を 2進方

$$a = 0.1100101111 \cdots$$

と書いたとき, 左のような番号をつけた3角形の極限が唯1つ対応する.
一方 この曲線の"面積"は

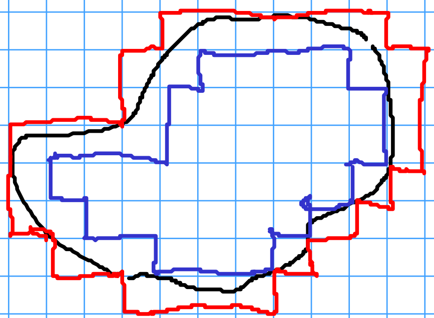
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right) > \frac{1}{e} \neq 0$$

0より大きい.

このように"面積"や"長さ"というのはきちんと定義しないと，何をやっているのかわからなくなる．という危険がある．

• 定積分の定義

基本方針　細かい正方形(あるいは長方形)で"面積"を定義したい図形を覆って，上と下から近似あるいは，中と外から近似する．



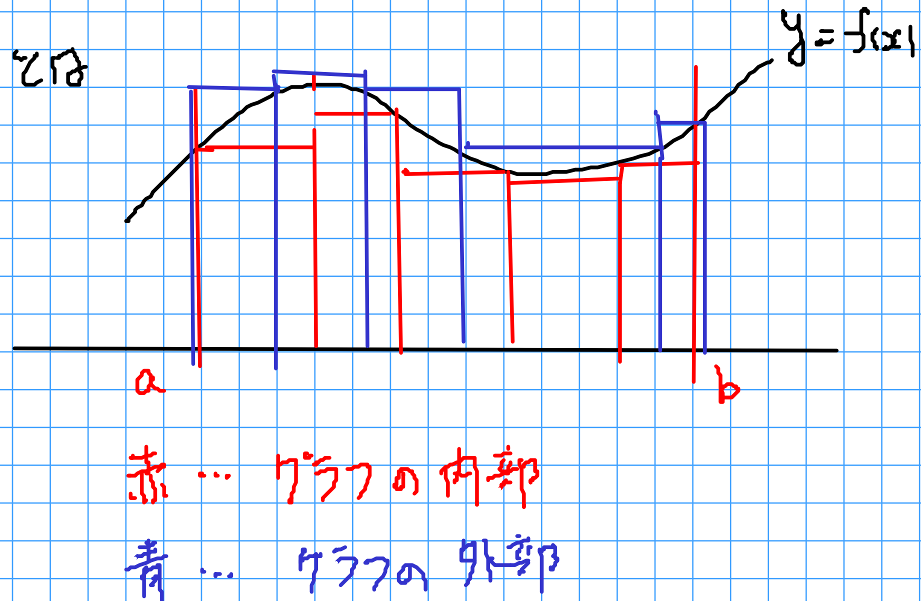
細かさを無限大にしたとき中と外の極限が一致する場合，その極限を面積とする．

※ 極限が一致しない場合，面積は定義されない．

定義　$y=f(x)$ の定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

とは



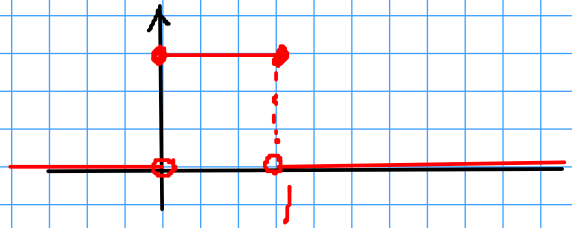
区間 $[a,b]$ を分割し，その分割の線分を底辺とする長方形でグラフを含むもの，含まれるものを考え，その長方形の面積の総和を考え，区間の長さを無限小にしたときの極限

※ 分割の取り方はどう取っても良く，又
大きい方と小さい方で異なっても良い．

問 $y = f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ 1 & x \in [0,1] \end{cases}$

の定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ を求めよ．

解. この関数のグラフは



$[-1, 1]$ を $2n$ 等分する．k番目の区域は

$\left[-1 + \dfrac{k-1}{n},\ -1 + \dfrac{k}{n}\right]$ で

$1 \leqq k \leqq n$ 番目の区域で $f(x)$ は 0.

$n+1 \leqq k \leqq 2n$ 〃 $f(x)$ は 1

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= 1$$