2008/10/03 (金)

問 1

(1) $\displaystyle \int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + C & (n \neq -1) \\ \log|x| + C & n = -1 \end{cases}$

(2) $\displaystyle \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$\displaystyle = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx$

公式 $\displaystyle \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$

を使えば、

$= -\log|\cos x| + C$

(3) $\displaystyle \int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx$

$\displaystyle = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$\displaystyle = x \log x - \int 1 \, dx$

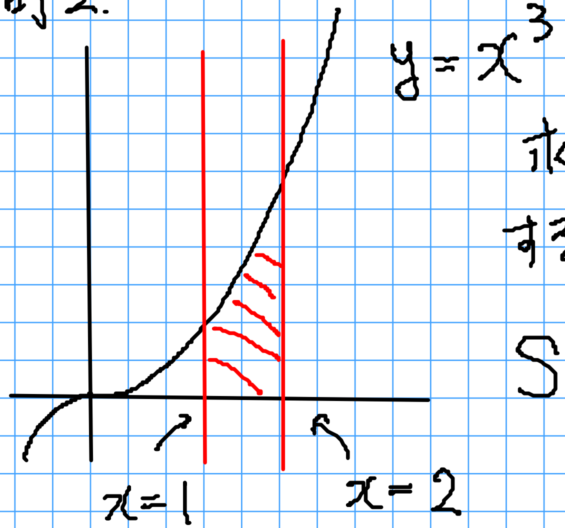
$= x \log x - x + C$

ここで部分積分の公式

$\displaystyle \int (u)' v \, dx = uv - \int u v' dx$

を使った。

問 2.



求める面積を S とすると、

$\displaystyle S = \int_1^2 x^3 dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^2$

$\displaystyle = \frac{1}{4}(2^4 - 1)$

$\displaystyle = \frac{15}{4}$ //

授業内容(予定)

- 何故面積が定積分で計算できるか.

そもそも面積とは何か?

↳ 2, 3回目 積分の定義に戻って考える.

- 積分の定義を拡張し, 新しい函数を定義する.

$3! = 1 \times 2 \times 3$　　${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$\left(\frac{1}{2}\right)! = ?$　　${}_{\frac{1}{3}}C_{\frac{1}{5}} = ?$

これらを定義する.

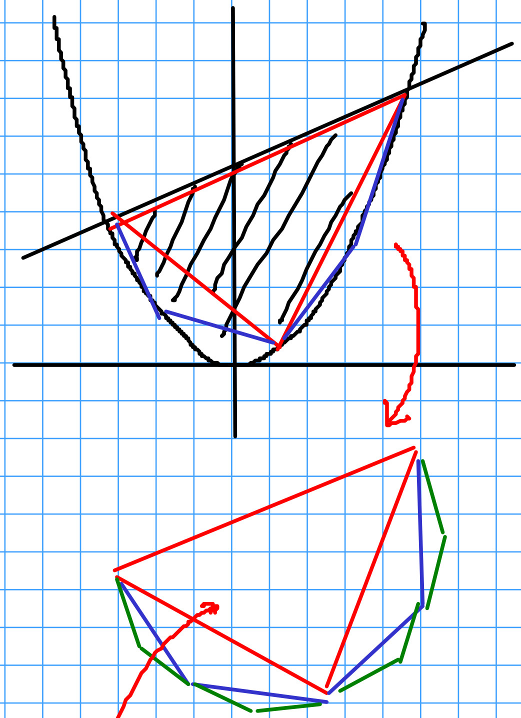
4〜6回目ぐらい.

以上が中間の範囲.

7回目以降. 多変数化.

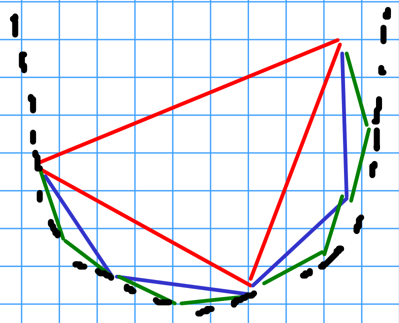
0. Archimedesの方法

Archimedesは放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めた.



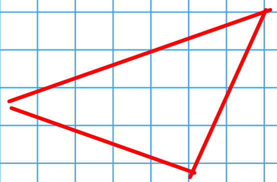
放物線の内部に3角形をしきつめ3角形の面積の合計を計算する, というのが彼の計算方法であった.

この一番大きい3角形の面積をTとおく.

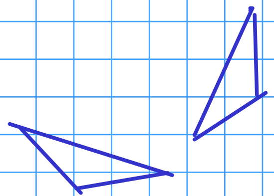


さて Archimedes の方法では 下にくる頂点のx座標は上の2つの頂点のx座標の中点に取る. y座標はグラフ $y=x^2$ にのるように取る.

Claim



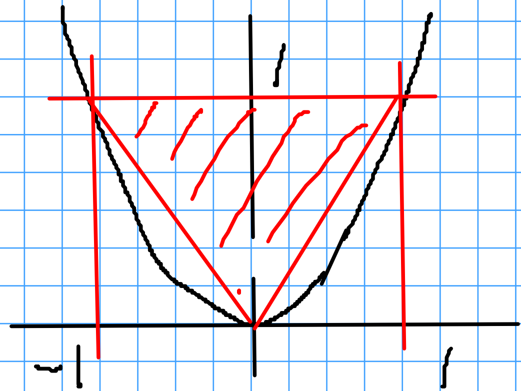
:



(面積の比)

$= 4 : 1$

これを認めて $y=x^2$, $y=1$ で囲まれる部分の面積を求めよう.



一番大きい赤の面積 … 1

二番目の赤×2の面積 … $\frac{1}{4}$

三番目の緑×4の面積 … $\frac{1}{16}$

のように一段階3角形を小さく取ること前の段階の3角形の$\frac{1}{4}$倍の面積が加わる.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

ノートは

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/lecture/2008/calculus2/index.html

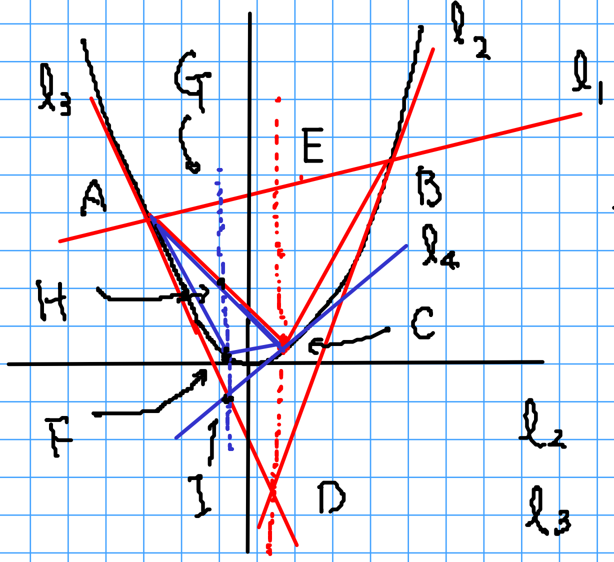
からダウンロードできます.

質問は授業の前後か,

matusita@math.sci.hokudai.ac.jp

まで.

Claimの証明



左図の青と赤の3角形の面積を比較する。但し

l_2 Bでの接線
l_3 Aでの接線
l_4 Cでの接線

放物線の性質として l_2, l_3 の交点Dと Cを結ぶ線はy軸に平行であり、l_1との交点EはABの中点、又CはDEの中点となる、というものがある。よって

△ACEの面積：△ABCの面積
$= 1 : 2$

となる。同様に IF = FH であり、HはACの中点となる。よって

$$2FH = HG$$

であり、又 FG // DE から

$$HG : CE = 1 : 2$$

よって

△ACEの面積：△ACFの面積
$= 4 : 1$

以上より

△ABCの面積：△ACFの面積
$= 8 : 1$