積分の計算

1. 置換積分

函数 $F(x)$, $f(x)$ は

$$F'(x) = f(x)$$

をみたすとする。このとき、別の函数 $g(x)$ に対して

$$\int f(g(x)) \underline{\qquad\qquad} dx = F(g(x)) + C$$

上の等式を説明するのに

① 積分の定義に戻る。 これは後日やる。

② 微積分の基本定理を使う

の2つの方法がある。

今回は②の方でやる。

$$\{F(g(x))\}' = F'(g(x))\, g'(x)$$
$$= f(g(x))\, g'(x)$$

例題 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を計算せよ。

解答例

$x = \sin t$ とおく。すると

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$$
$$= \int \frac{dx}{\cos t}$$
$$= \int \frac{1}{\cos t} \frac{dx}{dt}\, dt$$
$$= \int \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t\, dt$$
$$= \int 1\, dt = t = \mathrm{Arcsin}\, x$$

2. 部分積分

函数 $F(x)$, $f(x)$, $G(x)$, $g(x)$ が

$$F'(x) = f(x) \qquad G'(x) = g(x)$$

をみたすとする。このとき

$$\int f(x) G(x)\, dx = \underline{\qquad\qquad} - \int F(x) g(x)\, dx$$

この式を説明するには

$\{F(x)G(x)\}' = f(x)G(x) + F(x)g(x)$

と微積分の基本定理を使う。

例題 $\int \mathrm{Arctan}\, x\, dx$ を計算せよ。

$$\int \mathrm{Arctan}\, x\, dx = \int 1 \cdot \mathrm{Arctan}\, x\, dx$$

$$= x\, \mathrm{Arctan}\, x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\, \mathrm{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

※ 不定積分はいつでもできるわけではない。

例 $\int \frac{1}{\log x}\, dx$ は計算できない。

この講義では $\left\{ \begin{array}{l} \text{できる積分} \\ \text{できない積分} \end{array} \right.$

に対する嗅覚を身につけてもらうつもり。

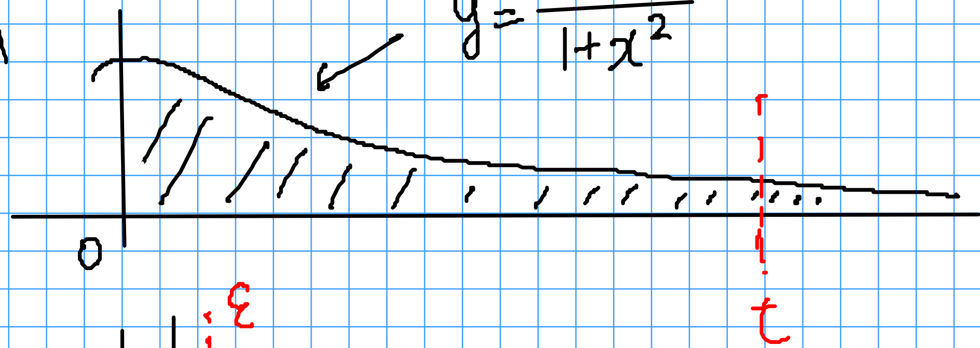
・広義積分。

定積分はグラフの囲む面積として定義された。これを拡大解釈して

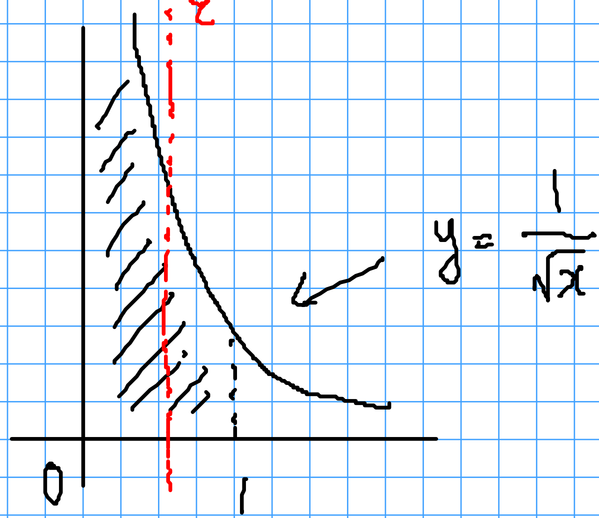
(a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, (b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

を定義したい。上の2つの"積分"を図示するならば

(a)



(b)



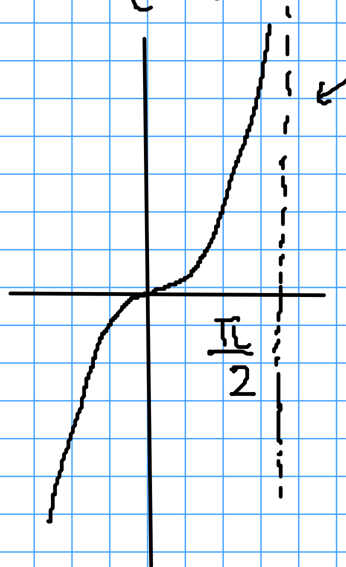
このような図形の"面積"を以下のように
定義する

(a) の場合 $\displaystyle \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$

(b) の場合 $\displaystyle \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\cancel{0}\,\varepsilon}^{\cancel{2}\,1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

上の極限を計算すると,

$$(a) = \lim_{t\to\infty}\left[\mathrm{Arctan}\,t - \mathrm{Arctan}\,0\right]$$



$$= \frac{\pi}{2}$$

$$(b) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}\right]$$

$$= 2$$

このように積分の概念を拡張することで
様々な新しい関数が定義できる

例 $\displaystyle \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ (n 自然数)

※ $\int e^{-x} x^{s-1}\,dx$ を計算することは
できない

尚 広義積分はいつでも存在するわけでは
ない.

例 $\displaystyle \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ は存在しない

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\{\log t - \log 1\}$$

$$= \infty \text{ (発散)}$$