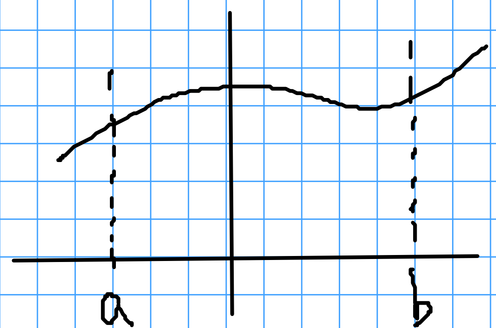
定積分の定義.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$F(x)$ … $F'(x) = f(x)$ となる函数

この授業での定積分の定義は,

$y=f(x)$ のグラフが下のように与えられたとすると,



nコに分けて

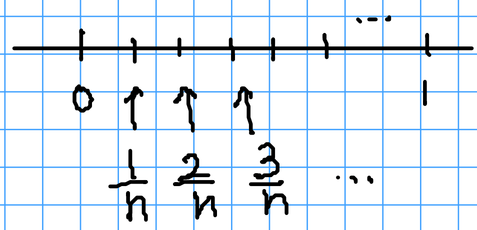
※1 区間 $[a, b]$ を細かくわけて, わけた

そのの1区間 $[a_k, b_k]$ としたとき,

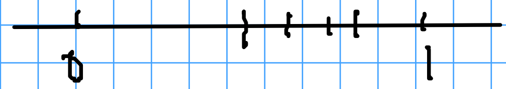
$c_k \in [a_k, b_k]$ を取り

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(b_k - a_k)$$

※ 分け方はどのように取っても良い

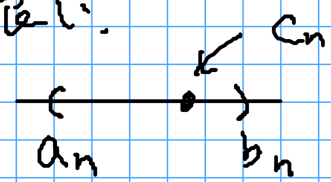


均等にnコに分けても良い.

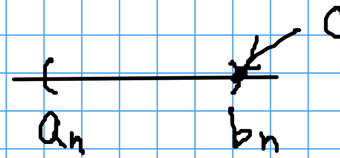


不均等に分けても良い.

同様に c_n を $[a_n, b_n]$ のどこを取っても良い.



中に取っても良い



端に取っても良い.

具体的な例で定義を見なおしてみよう.

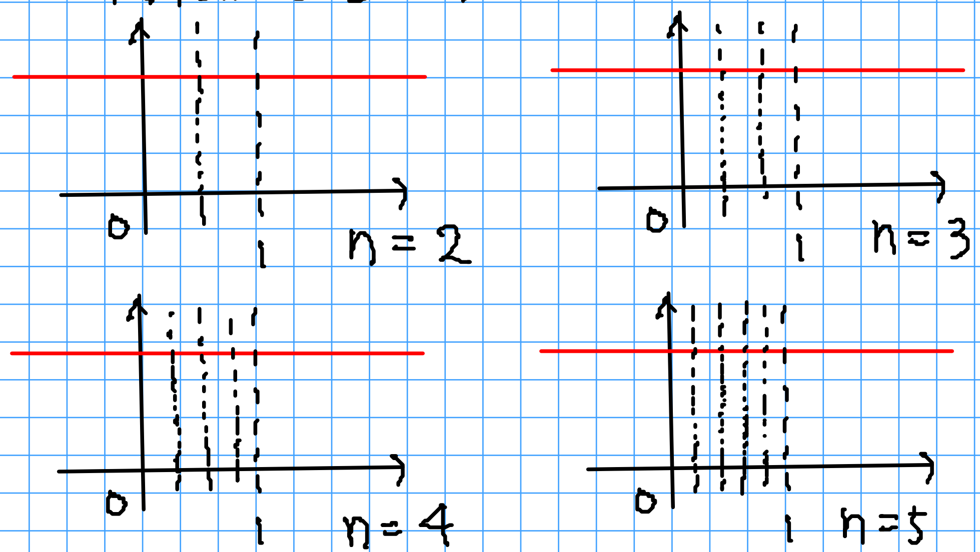
例 $\int_0^1 1\cdot dx$ を考える.

まず区間 [0, 1] を均等に n 等分する。
すると左から k 番目の区域は $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$
積分記号の中の函数は定数函数 1
なので、区間 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ のどの点
を取っても値は 1。よって

$$\int_0^1 1\cdot dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

この計算を図示すると、



底辺の長さがだんだん小さくなる長方形
たちで覆って、その面積の総和を計算
している。このようなまわりくどい定義を
するのは、以下のような函数の積分も
(時には)考えることがあるからである。

$y = f(x)$ を
　x をまず2進法で読み、それを10進法
　で読んだものを y とする。
と定義する。

$x = 2 \rightarrow x = 10$ (2進法)
$y = 10$

$x = 3 \rightarrow x = 11$ (2進法)
$y = 11$ など

この函数に対して
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{18}.$$

さて、このように定積分を定義したとすると、以下の公式は"本当"は証明が必要となる。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

（積分区間の分割）

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

（和の積分は積分の和）

これらの証明は教科書 p90〜96 に書かれている。

- 微積分の基本定理

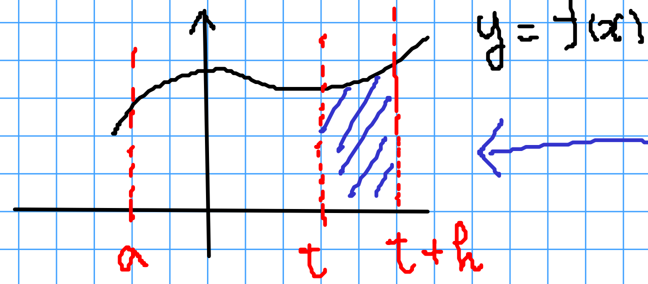
定積分をその本来の定義に戻って計算することはたいてい難しい。

実際の計算には次の定理を使うことになる。

定理

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx = f(t)$$

定理の説明。 ※2

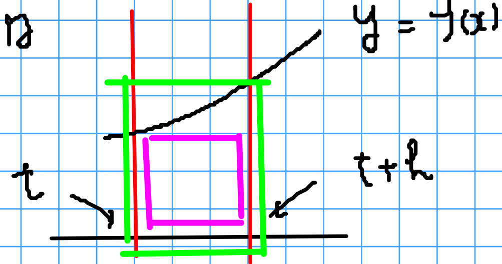


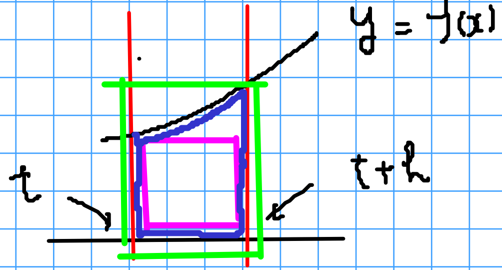
$$\int_a^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx$$

$$= \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

この部分の面積

この図では





□ の面積

$\wedge\!\!\shortparallel$

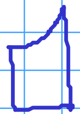
（青の面積）

$\wedge\!\!\shortparallel$

□ の面積

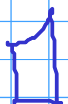
□ の高さ …… $f(t)$

□ の高さ …… $f(t+h)$

$h f(t) \leqq$  $\leqq h f(t+h)$

これは元々 $\int_a^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^{t} f(x)\,dx$

なので $S(t) = \int_a^{t} f(x)\,dx$ とおくと、

 $= S(t+h) - S(t)$

まとめて

$$h f(t) \leqq S(t+h) - S(t) \leqq h f(t+h)$$

$$f(t) \leqq \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leqq f(t+h)$$

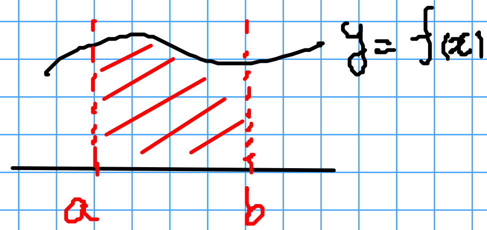
$h \to 0$ として極限を取れば

$$f(t) = S'(t)$$

$S(t) = \int_a^{t} f(x)\,dx$ だったので

$$f(t) = \frac{d}{dt}\int_a^{t} f(x)\,dx$$

さて上の式から



$\int_a^{b} f(x)\,dx$ を求めるためには $F'(x) = f(x)$

となる関数 $F(x)$ を何らかの方法でみつけ、

$F(b) - F(a)$ を計算すれば良い。

例題　$y = \mathrm{Arctan}\, x$ の微分を考える

$y = \tan x$ の逆関数

ことで $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ を求めよ.

解　$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$　　$x = \tan y$ より

$$= \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}}$$

$$= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

よって $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}\, 1 - \mathrm{Arctan}\, 0$

$$= \frac{\pi}{4}$$

講義補足

※1. 実はこれだけではダメで、区間の分割は $n \to \infty$ としたとき、各区間の長さは0になる、という条件をつけなくてはならない.

※ この図では $f(x)$ が単調増加であるようなグラフを描いてすましているが本来はそれ以外の場合も考える必要がある.