2008/10/01 (水)

確認テスト

問 1.

(1) $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

$(n \neq -1)$

$= \log x + C$

$(n = -1)$

(2) $\int \tan x \, dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx$

$= \int \dfrac{-(\cos x)'}{\cos x} dx$

$= -\log|\cos x| + C$

(3) $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx$

$= x \cdot \log x - \int x \cdot \dfrac{1}{x} dx$

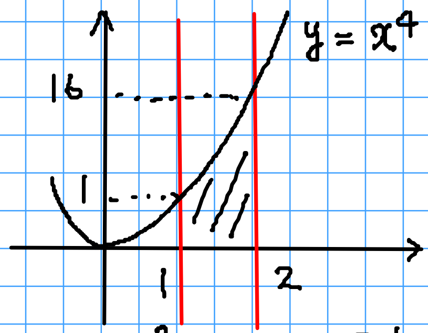
$= x \cdot \log x - \int 1 \cdot dx$

$= x \cdot \log x - x + C$

(4) $\int \sqrt{x} \, dx = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \dfrac{2}{3} x^{3/2} + C$

問 2 面積を求める図形は下のようになる.



$S = \int_1^2 x^4 dx = \left[\dfrac{1}{5} x^5\right]_1^2$

$= \dfrac{32-1}{5} = \dfrac{31}{5}$

さて，何故 定積分を計算すると
グラフと直線で囲まれた部分の面積
が計算できるのだろうか？

⇒ 積分の定義に戻って考える必要
がある．　2, 3回目で扱う．

⇒ 今度は積分の定義を拡張する．
(広義積分)　4, 5回目

⇒ 拡張した定義を用いて新しい関数
を定義する．　6, 7回目
(Γ, B 函数等)

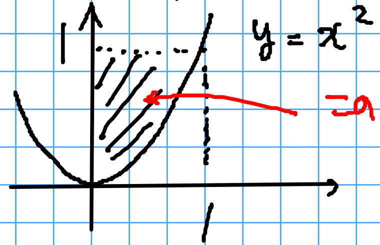
以上の内容で中間テスト
予定 12/3

8回目以降　多変数に拡張

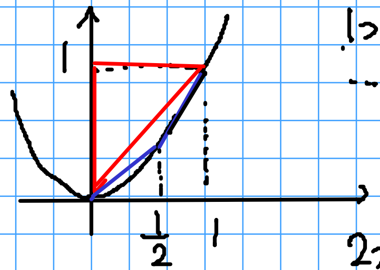
休講 10/22, 11/12.

§0. 面積を計算するとは？
(教科書 p 86).

Archimedes は以下のようにして
面積を計算した．

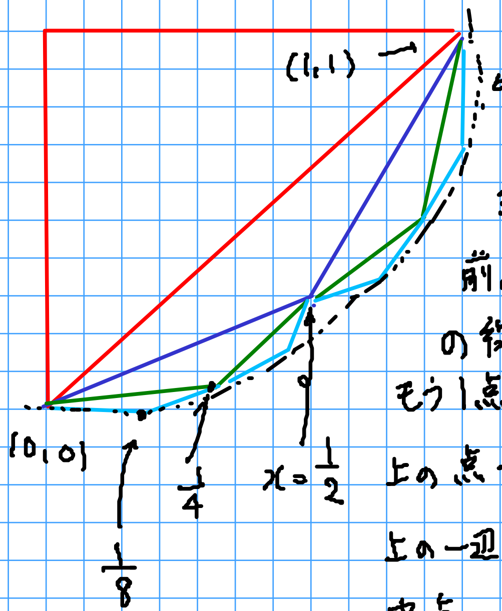


この部分の面積を
計算したい．



1つ目
… (0,1), (1,1)
(0,0) を頂点とする．

2つ目 (0,0) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
(1,1) を頂点



3つ目以降

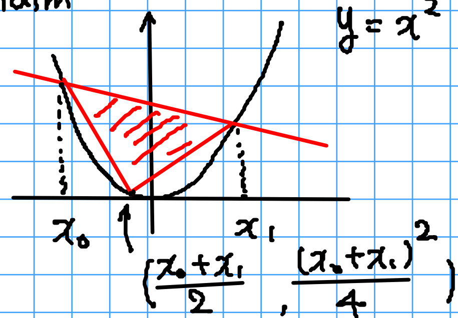
前の3角形の外側の辺を一辺とし

もう1点を $y=x^2$ 上の点で x 座標が

上の一辺の x 座標の中点、となるように取る。

この操作を無限回つづけると放物線の内部はすべておおわれるので、3角形の面積の総和が求める面積となる。

Claim



(赤の部分の面積) $= \frac{1}{8}|x_0-x_1|^3$

このClaimを使うと

$= \frac{1}{2}$ $\quad$ $= \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}$

$= \frac{1}{8}$ $\quad$ $= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{512}$

$\times 2$ $\quad$ $\times 4$ であることを

考えると、求める面積は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{64} + 4\cdot\frac{1}{512} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

今日のノートは

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/lecture/2008/calculus2/index.html

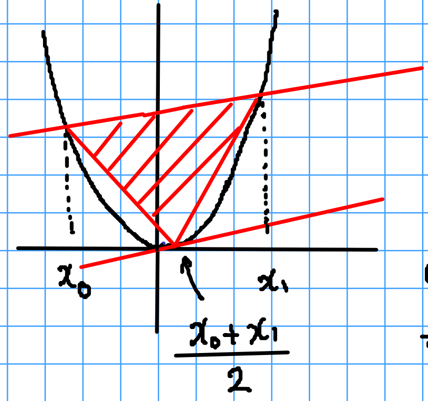
からダウンロード可能.

質問は

matusita@math.sci.hokudai.ac.jp

まで.

補足　Claimの説明



$\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{(x_0+x_1)^2}{4}\right)$ での接線は (x_0, x_0^2), (x_1, x_1^2) を結ぶ直線と平行であることに注意する.

よって求める面積は接線とy軸の交点 $\left(0, \frac{1}{4}(x_0-x_1)^2\right)$ を考えることにより

$$\frac{1}{2}\times|x_0-x_1|\times\frac{1}{4}(x_0-x_1)^2$$

$$= \frac{1}{8}|x_0-x_1|^3$$