2週間前の復習.

例1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

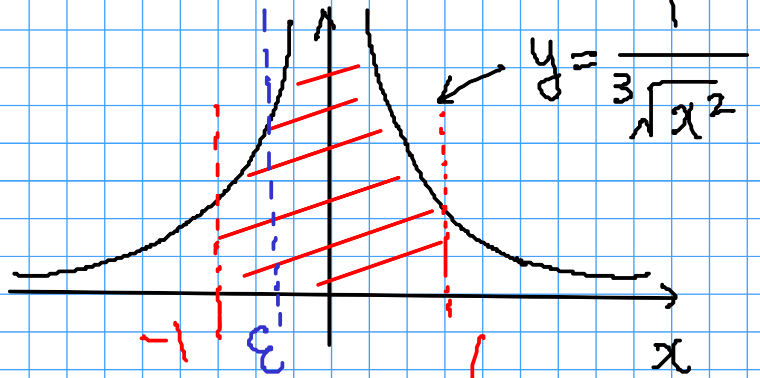
$\displaystyle \overset{?}{=} \left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\, x^{1-\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{1}$

$\displaystyle = \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{1} = 3\cdot 1^{\frac{1}{3}} - 3(-1)^{\frac{1}{3}}$

$(-1)^3 = -1$ より $-1 = (-1)^{\frac{1}{3}}$

となるので

$= 3 - 3(-1) = 6$



考えている部分は "天井抜け"

本来は

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to-0}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\varepsilon'}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

と極限を取る必要がある. ここで実際に極限を取ると 6 と同じ値になる.

例2 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \overset{?}{=} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = 2$

実際は

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to-0}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\varepsilon'}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to -0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to +0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon'}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to -0} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) + \lim_{\varepsilon' \to +0} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon'} \right]$$

$$= \infty$$

定理　函数 $y = F(x)$, $f(x)$ が

$$F'(x) = f(x)$$

をみたすとする。このとき、$F(x)$ が連続（グラフがつながっている。）であれば

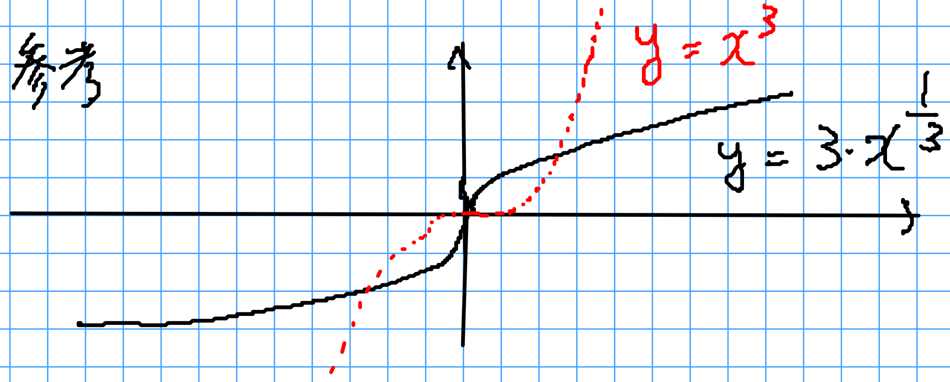
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

となる。

例1.　$F(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{3}}$　　$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

例2.　$F(x) = -\dfrac{1}{x}$　　$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

参考



定理の証明は教科書 p109.

• ガンマ函数、ベータ函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx \quad (s > 0)$$

ガンマ

を Euler のガンマ函数という。

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\,dx$$

をベータ函数という。2つとも広義積分で定義されていることに注意。収束するかどうかを考える前に上の2つの函数の性質を見る。

まず次の式を示す。

こちらを積分

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s>0)$$

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^s \, dx$$

$$= \left[-e^{-x} \cdot x^s\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} s x^{s-1} \, dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-x} x^s\right]_0^t + \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx$$

ここで 任意の $s>0$ に対し

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^s}{e^x} = 0$$ (ロピタルを使って示せる。)

なので

$$= \int_0^\infty e^{-x} s \cdot x^{s-1} \, dx$$

$$= s\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{s-1} \, dx = s\Gamma(s)$$

この式を使って

$$\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)$$

$$\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)$$

$$\Gamma(5) = 4\cdot\Gamma(4) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,\Gamma(1)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1) \quad (n \text{ 自然数})$$

ここで

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{1-1} \, dx = \int_0^\infty e^{-x} dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

以上から n が自然数ならば

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! \quad ????$$

$$= \sqrt{\pi}$$

一方ベータ関数に対しては，

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \cdots\cdots (*)$$

特に p, q が自然数ならば

$$B(p,q)=\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

$$=\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-2)!}\times\frac{1}{p+q-1}$$

$$=\frac{1}{{}_{p+q-2}C_{p-1}}\times\frac{1}{p+q-1}$$

$$\left({}_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\right)$$

つまり

$${}_{p+q-2}C_{p-1}=\frac{1}{p+q-1}\,\frac{1}{B(p,q)}$$

これを使って，例えば

${}_{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}-2}C_{\frac{5}{2}-1}$ なども定義できる．

$(*)$ を p, q が自然数のときに示す．

$f(p)=\Gamma(p+q)B(p,q)$ とする．

このとき，

$$f(p+1)=\Gamma(p+1+q)B(p+1,q)$$

$$=(p+q)\Gamma(p+q)\times\frac{p}{p+q}B(p,q)$$

$$=p\,\Gamma(p+q)B(p,q)$$

$$=p\,f(p)$$

よって

$$f(p)=(p-1)!\,f(1)$$

$$f(1)=\Gamma(1+q)B(1,q)$$

$$B(1,q)=\int_0^1 x^{1-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1(1-x)^{q-1}dx$$

$$f(p) = (p-1)!\, f(1)$$

$$f(1) = \Gamma(1+q)\, B(1, q)$$

$$B(1, q) = \int_0^1 x^{1-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^1 (1-x)^{q-1}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{q}(1-x)^q\right]_0^1 = \frac{1}{q}$$

$$\Gamma(1+q) = q!$$

より $f(1) = q! \times \dfrac{1}{q} = (q-1)!$

以上まとめて

$$f(p) = (p-1)!\,(q-1)! = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

$$f(p) = \Gamma(p+q) \cdot B(p, q)$$

と定義したので、

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

・ガンマ関数などが収束することの検証

定理 関数 $y = f(x)$ が $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ かつ $[c, b]$ で a 以外では連続とする。このとき、

$$|x-a|^\alpha |f(x)| < M$$

を a の近傍でみたす $0 < \alpha < 1$, 定数 M があれば、

or

ある $0 < \alpha < 1$ に対して

$$\lim_{x \to a} |x-a|^\alpha |f(x)|$$

が収束すれば

のいずれかをみたせば

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{or} \quad \int_c^a f(x)\,dx$$

は収束する。