2週間まえの復習

$$\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{n}}\,dx = \left[\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\cdot x^{1-\frac{2}{n}}\right]_{-1}^{1}$$

?

$$= \frac{1}{1-\frac{2}{n}}\left(1^{1-\frac{2}{n}} - (-1)^{1-\frac{2}{n}}\right)$$

ここで $(-1)^{1-\frac{2}{n}} = (-1)^{1} \times \{(-1)^{2}\}^{\frac{1}{n}}$

$$= -1$$

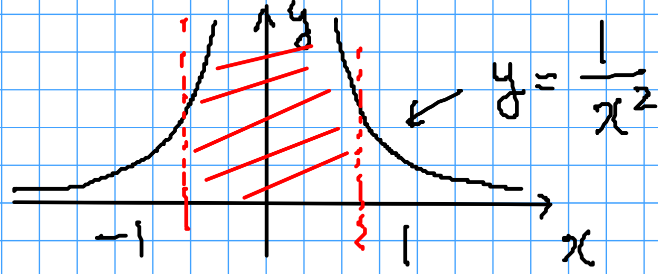
よって求める積分 $= \dfrac{1}{1-\frac{2}{n}} \times \{1-(-1)\}$

$$= \frac{2n}{n-2} \,//$$

この計算が少しおかしいことは次の例からわかる。

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \overset{?}{=} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = 2$$

一方，この積分は



"天井抜け"の面積なので，本来は

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon'}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\varepsilon,\ \varepsilon' > 0$$

を考え，$\varepsilon,\ \varepsilon' \to 0$ としたときの極限を取らなくてはならない。

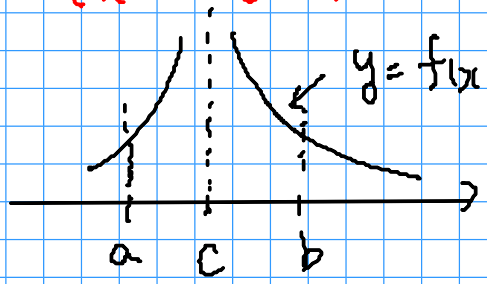
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$$

定理 $y=f(x)$ が $x=c$ で不連続

それ以外で連続とする．

（$x=c$ でグラフが切れている．）



又 $y=F(x)$ は $F'(x)=f(x)$ をみたし

$x=c$ で連続とする．すると

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

例 $f(x)=x^{-\frac{2}{n}}$ のとき $x=0$ で不連続

$(n\geqq 3)$

$$F(x)=\frac{1}{1-\frac{2}{n}}x^{1-\frac{2}{n}} \quad x=0 \text{ で連続}$$

$f(x)=x^{-2}$ のとき，$x=0$ で不連続

$F(x)=-\frac{1}{x}$ 〃

証明は p109 定理 37

・ガンマ函数，ベータ函数

$$\Gamma(s):=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \quad (s>0)$$

これを Euler のガンマ函数という．

なお $\int e^{-x}x^{s-1}dx$ を計算することは

できない．よって上記の広義積分が本当

に意味があるかどうかは これまでとは

違う手法で検証する必要がある．

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p,q>0)$$

これを Euler のベータ函数という．

やはり $\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ も計算できない

上の2つの函数が存在するかどうか？

は一時置いておいて，これらの性質を見よう．

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$$
$(s>1)$

$$= \left[-e^{-x}x^{s-1}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}(s-1)\cdot x^{s-2}\,dx$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-x}x^{s-1}\right) - \lim_{x\to \cancel{\infty}\,0}\left(-e^{-x}x^{s-1}\right)$$

$$+ (s-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{s-2}\,dx$$

任意の正の数 α に対して

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{\alpha} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$$

より

$$= (s-1)\Gamma(s-1).$$

書き直して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

Q. $\Gamma(3) = 2\cdot 1\,\Gamma(1)$

$\Gamma(4) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)$

$\vdots$

$\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1)$

$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3)$

$= 3\cdot 2\cdot \Gamma(2)$

....

又 $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}x^0\,dx$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

よって n：自然数 であれば

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

これから Γ 関数は 階乗 を一般化した ものと見ることができる.

例 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

一方 ベータ関数 $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

は、

$${}_{p+q}C_p = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

をみたす. よって p, q が 自然数 のとき

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{1}{(p+q-1)\;{}_{p+q-2}C_{p-1}}$$

ベータ関数の式の説明

$f(p) = B(p, q)\Gamma(p+q)$ （p, q は自然数とする.）

と考える.

$f(p+1) = B(p+1, q)\cdot\Gamma(p+q+1)$

ここで $B(p+1, q) = \dfrac{p}{p+q} B(p, q)$

$\Gamma(p+q+1) = (p+q)\cdot\Gamma(p+q)$

より

$f(p+q+1) = p\, B(p, q)\Gamma(p+q)$

$= p\, f(p).$

よって

$f(p) = (p-1)!\, f(1)$

$f(1) = B(1, q)\Gamma(1+q)$

$B(1, q) = \int_0^1 x^{1-1}(1-x)^{q-1} dx$

$= \int_0^1 (1-x)^{q-1} dx = \left[-\dfrac{1}{q}(1-x)^q\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{q}$

$\Gamma(1+q) = q!$

以上まとめて. $f(1) = (q-1)!$

$f(p) = (p-1)!\,(q-1)! = \Gamma(p)\Gamma(q)$

$= B(p, q)\Gamma(p+q)$

よって $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

・広義積分の収束判定.

定理. $y = f(x)$ は $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ とする.

$\int_a^b f(x)\, dx$ が存在するための十分条件

のように、ある定数 M, $0 < \alpha < 1$ があり

$(x-a)^\alpha |f(x)| < M$ $(a \leqq x \leqq b)$

となれば良い.

例題 $\displaystyle\int_{1/2}^{1} x^p(1-x)^q\,dx \quad (p, q > -1)$

は収束することを示せ。

解. $q \geqq 0$ の場合は普通の積分なので、

$q < 0$ とする。このとき、$\displaystyle\lim_{x\to1} x^p(1-x)^q = \infty$

又 $(1-x)^{-q} \times x^p(1-x)^q$

$= x^p \leqq 1.$

となるので収束することがわかる。