$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を以下の2つを仮定して示す.

1) $\log \Gamma(s)$ のグラフは下に凸

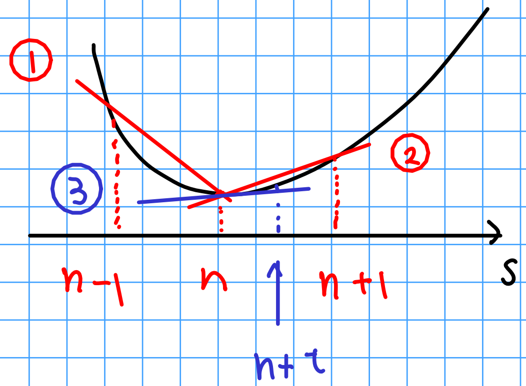
2) $$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

(因数定理を考えると良い)

まず

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^s\, n!}{s(s+1) \cdots (s+n)}$$

を示す.



$0 < \tau < 1$ に対し

① $n-1 \sim n$ を結ぶ直線

② $n \sim n+1$ を結ぶ直線

③ $n \sim n+\tau$ を結ぶ直線

とすると $\log \Gamma(s)$ のグラフは下に凸なので

①の傾き < ③の傾き < ②の傾き

となる. よって

$$\log \Gamma(n) - \log \Gamma(n-1) < \frac{\log \Gamma(n+\tau) - \log \Gamma(n)}{\tau} < \log \Gamma(n+1) - \log \Gamma(n)$$

$$\Longleftrightarrow \log (n-1)^{\tau} < \log \frac{\Gamma(n+\tau)}{\Gamma(n)} < \log n^{\tau}$$

$$\Gamma(n+\tau) = (n+\tau-1) \cdots (\tau+1)\tau\,\Gamma(\tau)$$

より,

$$\frac{(n-1)^{\tau}(n-1)!}{\tau(\tau+1)\cdots(n+\tau-1)} < \Gamma(\tau) < \frac{n^{\tau}(n-1)!}{\tau(\tau+1)\cdots(n+\tau-1)}$$

この不等式で 右辺 の n を $n+1$ にかえると

$$\frac{n^t\, n!}{t(t+1)\cdots(t+n)} < \Gamma(t) < \frac{n^t\, n!}{t(t+1)\cdots(t+n)}\cdot\frac{t+n}{n}$$

よって

$$\frac{n}{t+n}\Gamma(t) < \frac{n^t\, n!}{t\cdots(t+n)} < \Gamma(t)$$

$n\to\infty$ とすれば

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^t\, n!}{t(t+1)\cdots(t+n)}$$

を得る. さてこの式から

$$\Gamma(1-t) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-t}\, n!}{(1-t)(2-t)\cdots(n+1-t)}$$

となるので

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{t(1-t^2)(2^2-t^2)\cdots(n^2-t^2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{-1}$$

ここで

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

より

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin\pi t}$$

$t=\frac{1}{2}$ を代入すれば

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

よって $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を得る.