先週の復習

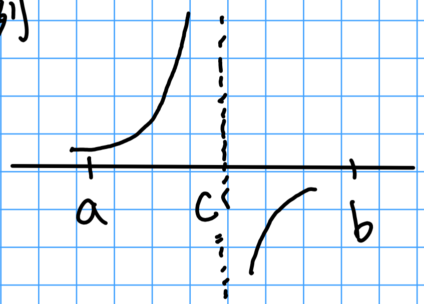
広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ はいつ収束するか?

定理 関数 $y=f(x)$ は区間 $[a,b]$ で

$x=c$ $(a \leqq c \leqq b)$ を除いて連続

又 $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ とする。

例



このとき、

(a) ある $0 \leqq \alpha < 1$ に対して

$$|(x-c)^{\alpha} f(x)| < M$$

をみたす定数 M が存在

(b) ある $0 \leqq \alpha < 1$ に対して

$$\lim_{x\to c} |(x-c)^{\alpha} f(x)|$$

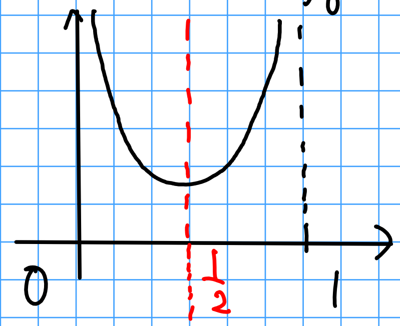
が収束する。

(a) 又は (b) が成立するならば積分

$\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する。

例

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p,q>0)$$



$\begin{cases} 0<p<1 \\ 0<q<1 \end{cases}$ の場合

グラフは左のようになる。

この場合に $B(p,q)$ が収束することを示すには

$$B(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

と分けて考える。まず前の項

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

に対して $1>\alpha>1-p$ と取れば、 $\alpha+p-1>0$

$$\lim_{x\to 0} |(x-0)^{\alpha} x^{p-1}(1-x)^{q-1}|$$

$$= \lim_{x\to 0} |x^{\alpha+p-1}(1-x)^{q-1}| = 0$$

となるので収束する。次に後者

$$\int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

に対して α を $1-q<\alpha<1$ と取れば

$$\lim_{x\to 1}\left|\,(x-1)^{\alpha}\,x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\right| = 0$$

指数の和が正

となるので収束する。

定理′ $y=f(x)$ が区間 $[a,\infty)$ で連続 $(a>0)$ とする。このとき

(a) ある $\alpha>1$ があり

$$|x^{\alpha}f(x)| < M$$

となる定数 M が存在する。

又は

(b) ある $\alpha>1$ があり

$$\lim_{x\to\infty}|x^{\alpha}f(x)|$$

が収束する。

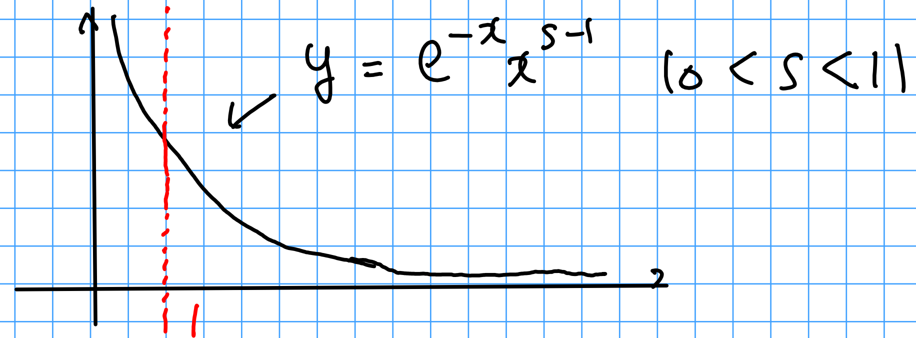
(a) or (b) が満たされれば

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

は収束する。

例 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx \quad (s>0)$

が収束することを示す。



$$\Gamma(s)=\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx+\int_1^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

と分けて考える。前者は α を $1-s$ と取れば

$$\lim_{x\to 0}|x^{1-s}e^{-x}x^{s-1}| = \lim_{x\to 0}|e^{-x}| = 1$$

$1>\alpha\geqq 1-s$ であれば何でもない

となるので収束する。

後者 $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ に対しては

$\alpha > 1$ とすれば

$$\lim_{x\to\infty} |x^{\alpha} e^{-x} x^{s-1}|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+s-1}}{e^x} = 0$$

この収束はロピタルの定理を使うと良い

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots$$

$$\cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

と収束するので積分も収束する.

定理' の証明

(b)の条件から(a)が出るので(a)を仮定して定理'を示す.

(a)より

$$|x^{\alpha} f(x)| < M \quad (M \text{ 定数})$$

よって $|f(x)| < \dfrac{M}{x^{\alpha}}$ ($x>0$ より)

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx < \int_a^{\infty} \frac{M}{x^{\alpha}} dx$$

$$= \left[\frac{M}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_a^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{M}{1-\alpha} a^{1-\alpha}$$

$\alpha > 1$ なので

結局

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx < -\frac{M}{1-\alpha} a^{1-\alpha}$$

となり収束する.

曲線の長さ

補題　$x=f(t)$, $y=g(t)$ で表される曲線 C の $a \leqq t \leqq b$ までの長さは、

$$\int_a^b \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt$$

と計算できる。

例　C: $x=\cos t$　$y=\sin t$

$0 \leqq t \leqq \pi$　(半円)

の長さを求めよう。

$$\int_0^\pi \sqrt{(\{\cos t\}')^2+(\{\sin t\}')^2}\,dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^\pi 1 \cdot dt = \pi$$

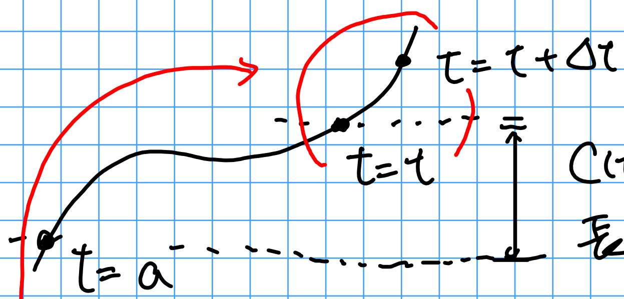
補題の説明

$x=t$　$y=g(t)$ の場合に限定して考える。

曲線が $y=f(x)$ とかけるとき。

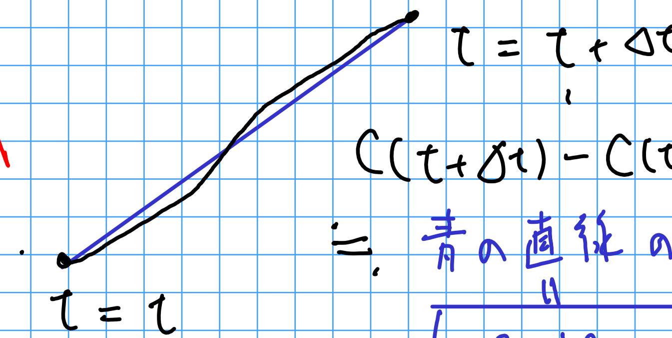
a から t までの長さを $C(t)$ とおく。

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t}$$ を計算する。



$C(t)$ はこの部分の長さ。

さて Δt を十分小さく取れば



$C(t+\Delta t)-C(t)$

$\fallingdotseq$ 青の直線の長さ

$= \sqrt{\Delta t^2 + \{f(t+\Delta t) - f(t)\}^2}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta t)^2 + \{f(t+\Delta t) - f(t)\}^2}}{\Delta t}$$

平均値の定理より

$$f(t+\Delta t) - f(t) = f'(t')\Delta t$$

$$t \leqq t' \leqq t + \Delta t$$

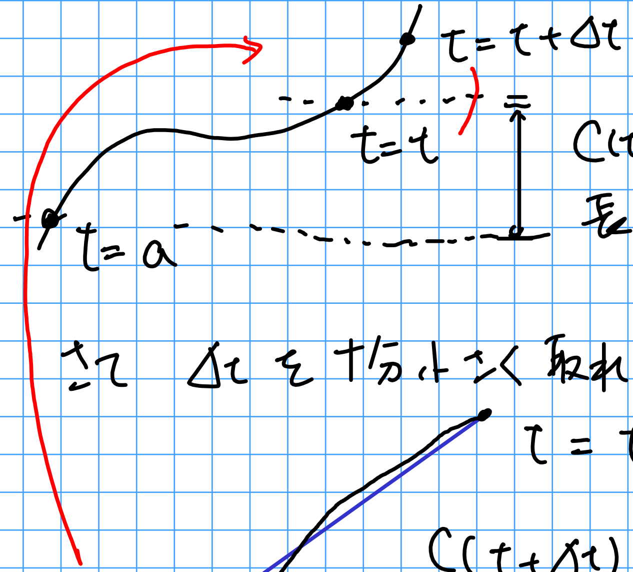
これを代入すると

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta t)^2 + \{f'(t')\}^2 \Delta t^2}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{1 + f'(t')^2}$$

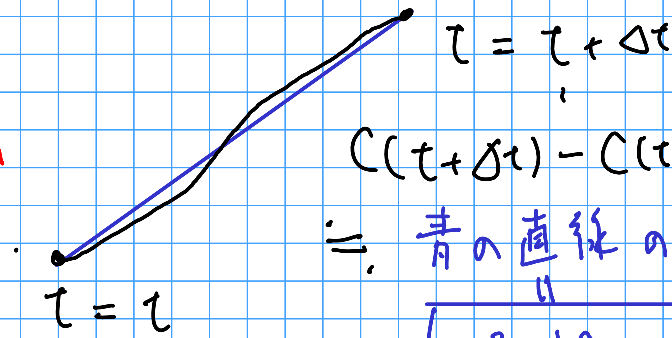
$$= \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$C(t) = \int_a^t \underbrace{\sqrt{1 + f'(t)^2}}_{= \sqrt{\left(\frac{dt}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2}} dt$$



C(t) はこの部分の長さ.

さて Δt を十分小さく取れば



$$C(t+\Delta t) - C(t)$$

≒ 青の直線の長さ

$$= \sqrt{\Delta t^2 + \{f(t+\Delta t) - f(t)\}^2}$$