重積分の計算の続き.

$$\iint_K f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)\,dy\right\} dx \quad \leftarrow \text{まず} y \text{で積分}$$

x を固定して

$$= \int_a^b F(x)\,dx \quad \leftarrow \text{次に} x \text{で積分}$$

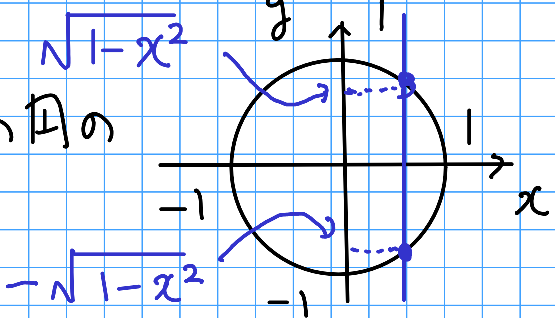
但し $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

※ x から積分しても良い.

※ 式の形によっては x 又は y の一方だけからしか計算できないことがある.

例 $\iint_K 1\cdot dxdy \quad K := \{x^2+y^2 \leq 1\}$

K は右の円の内部

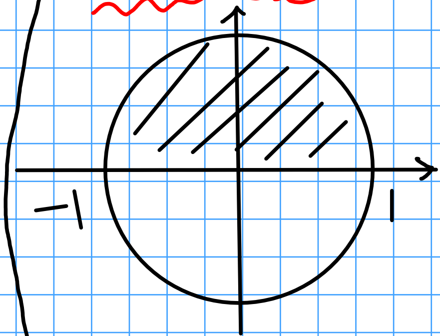


$$\iint_K 1\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left\{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\right\}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[y\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

上の積分は不定積分からも計算できるが



左の上半円の面積と等しい よって上の定積分の値は

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi. \leftarrow$$

底面が半径1の円 高さ1の円柱の体積と等しい.

1変数の積分では変数を置換するには

$y=f(x) \quad x=g(t)$

であるとき

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

この公式の重積分版を述べるために

Jacobi行列というものをまず定義する。

$x=f(s,t)\ ,\ y=g(s,t)$

のときJacobi行列は

$$J=\begin{pmatrix} \partial f/\partial s & \partial f/\partial t \\ \partial g/\partial s & \partial g/\partial t \end{pmatrix}$$

で定まる行列と定義する。

例 $x=\frac{1}{2}(s+t) \quad y=\frac{1}{2}(s-t)$

のとき、 $J=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

例 $x=s\cos t\ ,\ y=s\sin t$

のとき、 $J=\begin{pmatrix} \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \end{pmatrix}$

これを使うと重積分の変数変換公式は次のようになる。

$$\iint_K h(x,y)\,dxdy = \iint_{K'} h(f(s,t),g(s,t))\,\underbrace{\ }_{|\det J|}dsdt$$

K'は $(x,y)\in K$ となるような s,t の範囲.