先週は重積分の計算と定義を見た。

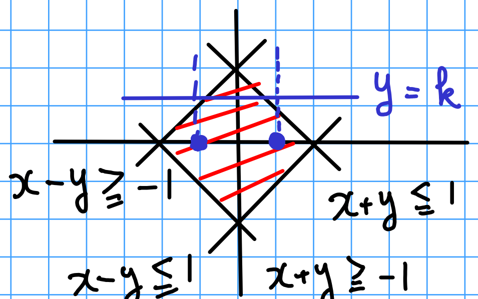
今回はまず重積分の別の計算法を紹介する。

- 変数変換（置換積分）

次の例を考える。

$$\iint_K 1\cdot dx\,dy \qquad K=\{|x|+|y|\leq 1\}$$

領域Kを図示すれば



となる。従って積分の計算は、

$$\iint_K 1\cdot dx\,dy = 2\int_0^1 \left\{\int_{y-1}^{1-y} 1\cdot \overset{dx}{\cancel{dy}}\right\} \cancel{dx}\,dy$$

$$=2\int_0^1 \left[\overset{x}{\cancel{y}}\right]_{y-1}^{1-y} d\cancel{x}y$$

$$=2\int_0^1 2(1-y)\,d\cancel{x}y$$

$$=2\left[-(1-y)^2\right]_0^1 = 2$$

このようにしても計算できるが、

$$\begin{cases} s = x+y \\ t = x-y \end{cases}$$

と変数をおきかえて、

$$\iint_K 1\cdot dx\,dy \overset{?}{=} \iint_{K'} 1\cdot ds\,dt$$

K は $K'=\{-1\leqq s\leqq 1,\ -1\leqq t\leqq 1\}$

にうつる。そのまま計算すると

$$\iint_{K'} 1\cdot ds\,dt = \int_{-1}^1 \left\{\int_{-1}^1 1\,ds\right\} dt$$

$$=\int_{-1}^1 [s]_{-1}^1\,dt$$

$$=\int_{-1}^1 2\,dt = [2t]_{-1}^1 = 4$$

となりただおきかえただけでは一致しない。

実際には

$$\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y \end{cases}$$
を x, y について解いたもの

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(s+t) \\ y = \frac{1}{2}(s-t) \end{cases}$$
から Jacobi 行列

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$
を考え、

その行列式 $|\det J|$ を組み入れなければならない。すなわち

$$\iint_K 1 \cdot dxdy = \iint_{K'} 1 \, |\det J| \, ds\,dt$$

この場合 $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ なので

$|\det J| = \frac{1}{2}$. よって

$$\iint_K 1\, dxdy = \iint_{K'} 1 \cdot \frac{1}{2}\, ds\,dt = 2.$$

公式

重積分

$\iint_K f(x,y)\,dxdy$ において

$x = a(s,t)$, $y = b(s,t)$

とおきかえると

$$\iint_K f(x,y)\,dxdy = \iint_{K'} f(a(s,t), b(s,t)) \, |\det J| \, ds\,dt$$

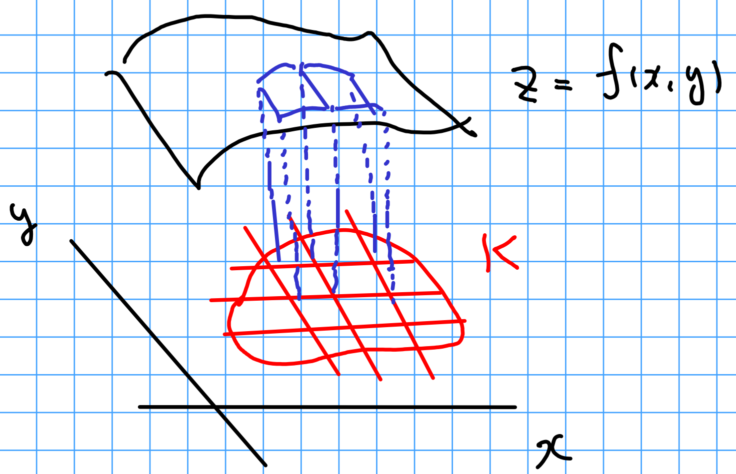
ただし

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial s} & \frac{\partial b}{\partial s} \\ \frac{\partial a}{\partial t} & \frac{\partial b}{\partial t} \end{pmatrix}$$

以下、この公式のおおまかな説明をする。

先週の重積分の定義では

$$\iint_K f(x,y)\,dxdy$$
$=$ (K を細かい長方形にわけ、その長方形を底面とする角柱の体積の和)

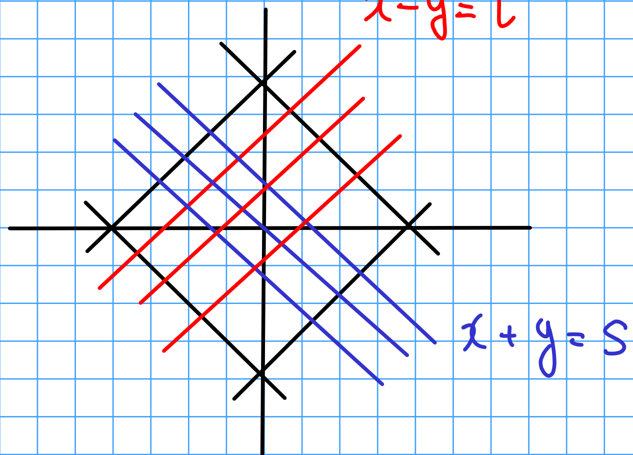


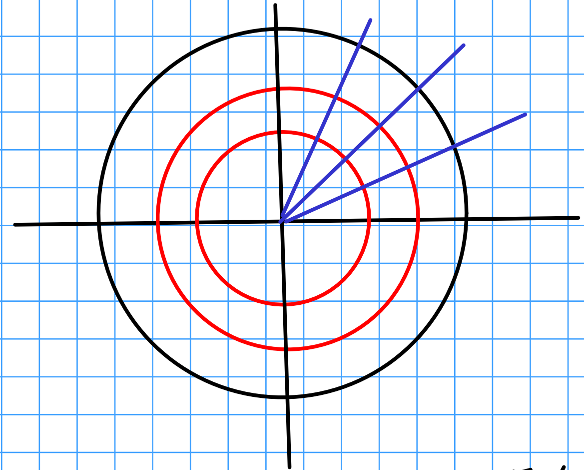
積分の変数変換は

Kを xy軸に辺が平行な長方形

を別の細かい区切り方に変える、という

ことをしている。





ここで、xyに辺が平行な長方形

$\neq$

別の区切り方をした場合の一区角

xyに辺が平行な長方形の関係は

xyに辺が平行な長方形の面積

＝|det J|×(別の区切りの場合の一区角の面積)

何故ならば

$x=a(s,t)$ $y=b(s,t)$

ならば

$$dx=\frac{\partial a}{\partial s}ds+\frac{\partial a}{\partial t}dt$$

$$dy=\frac{\partial b}{\partial s}ds+\frac{\partial b}{\partial t}dt$$

となるので

$$dx = \frac{\partial a}{\partial s} ds + \frac{\partial a}{\partial t} dt$$

$$dy = \frac{\partial b}{\partial s} ds + \frac{\partial b}{\partial t} dt$$

この式から

$$dxdy = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial s} & \frac{\partial a}{\partial t} \\ \frac{\partial b}{\partial s} & \frac{\partial b}{\partial t} \end{pmatrix} \right| ds\, dt$$

となるからである。