・曲線の長さ
・線積分
・重積分

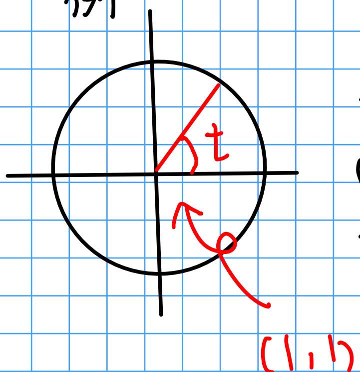
どのように計算するか?
に主眼を置いて解説する。

・曲線の長さ

平面上の曲線 C は 2つの関数 $f(t),\ g(t)$ を用いて次のようにかける。

$$(x, y) \in C \Leftrightarrow x = f(t),\ y = g(t)$$

例

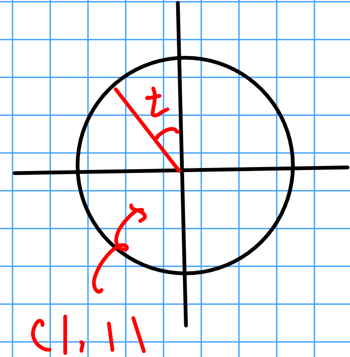


点 $(1, 1)$ を中心とする円は

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

この他にも

$$x = 1 - \sin t$$
$$y = 1 + \cos t$$



のように表記は色々ある。

さて、このように表わされた曲線

$$x = f(t),\quad y = g(t) \qquad a \leqq t \leqq b$$

の長さ l は

$$l = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

この公式を円の弧長の長さで確認する。

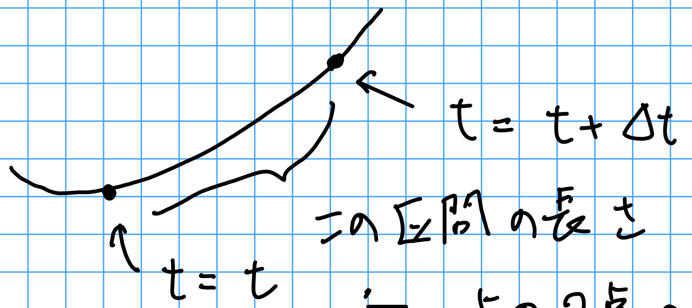
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\{(1+\cos t)'\}^2 + \{(1+\sin t)'\}^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

何故これで長さが計算できるのか 大ざっぱな話をすると 曲線の a 〜 t までの長さを $l(t)$ とおけば,

$$\frac{dl(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{l(t+\Delta t) - l(t)}{\Delta t}$$



≒ 上の2点の間の距離

$$\sqrt{\{x(t+\Delta t)-x(t)\}^2 + \{y(t+\Delta t)-y(t)\}^2}$$

$$\frac{l(t+\Delta t) - l(t)}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left\{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right\}^2 + \left\{\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right\}^2}$$

$\Delta t \to 0$ とすれば

$$= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

・線積分

曲線 $C: x=f(t),\ y=g(t),\ a \leqq t \leqq b$ に沿った関数 $z=h(x,y)$ の線積分とは

$$\int_C h(x,y)\,dx = \int_a^b h(f(t), g(t))\,f'(t)\,dt$$

例 $C: x=\cos t \quad y=\sin t \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi$

$h(x,y)=y$ のときに計算してみよう.

$$\int_C y\,dx = \int_0^{2\pi} \sin t(-\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt$$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ より

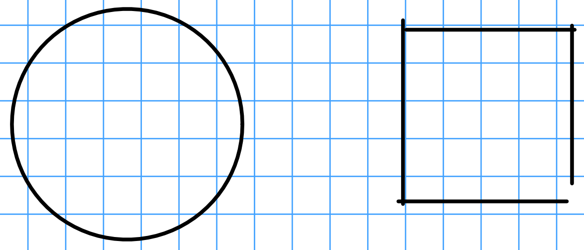
(Cの面積) $\times(-1)$

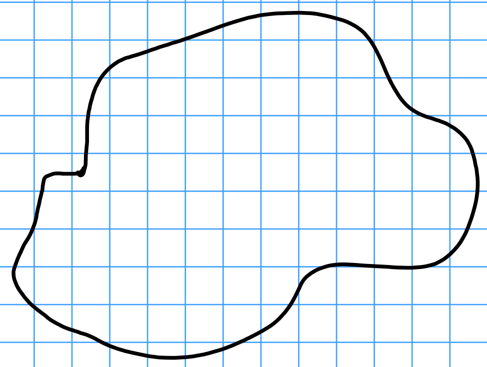
$$= \int_0^{2\pi} \frac{-1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \left[-\frac{t}{2} + \frac{\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\,2t}{4}\right]_0^{2\pi} = -\pi$$

重積分

平面の1部分を領域という.





色々なものがある.

関数 $z = f(x,y)$ の領域 K における重積分

$$\iint_K f(x,y)\,dxdy$$

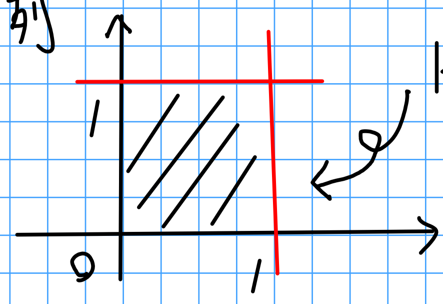
$$= \int_K dy \int f(x,y)\,dx$$

$$= \int_K dx \int f(x,y)\,dy$$

このようにも書く.

は次のように計算する.

例



$K = [0,1] \times [0,1]$ 上で関数 1 の重積分は

$$\iint_K 1\,dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 1\,dx \right\} dy$$

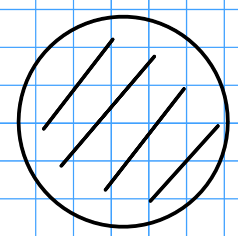
まず x で積分

$$= \int_0^1 [x]_0^1\,dy = \int_0^1 1\,dy$$

$$= [y]_0^1 = 1$$

※ y から積分しても同じである.

例



$K = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ 上の関数 $z=1$ の重積分

$\iint_K 1\,dxdy$ ← 来週

例 $K=[0,x]\times[0,x]$

$f(x,y)=e^{-x^2}$ であるときの重積分

$$\iint_K e^{-x^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^x\left\{\int_0^x e^{-x^2}dy\right\}dx$$

$$=\int_0^x\left[e^{-x^2}y\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^x x\cdot e^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{2}$$

一方 xで先に積分しようとすると

$$\int_0^x\left\{\int_0^x e^{-x^2}dx\right\}dy$$

計算できない.

このように重積分では積分する順番を変えると計算できないこと, あるいは計算できても, 手間がかなり違うことがある.