線積分.

座標平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 C があったとする

関数 $z = f(x, y)$ の C に沿った線積分

$$\int_C f(x, y)\, dx$$

とは C が $(a(t), b(t))$ $t_0 \leqq t \leqq t_1$ で定義されていると

すると,

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f(a(t), b(t))\, a'(t)\, dt$$

という定積分のことである.

例 $C : x^2 + y^2 = 1$ とし

$$\int_C y \cdot dx$$ を求めよ.

C のパラメーター表示として

$(\cos t, \sin t)$ $0 \leqq t \leqq 2\pi$

$$\int_C y \cdot dx = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot (-\sin t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t \, dt$$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ より

$$-\sin^2 t = \frac{\cos 2t - 1}{2}$$

これを上の式に代入すれば

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t - 1}{2}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}(-\sin 2t) - \frac{1}{2} t \right]_0^{2\pi}$$

$$= -\pi$$

← −(円の面積)

重積分

関数 $f(x, y)$ の平面上の領域 K に関する重積分 $\iint_K f(x, y)\, dx\, dy$

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int dy \int_K f(x,y)\,dx$$

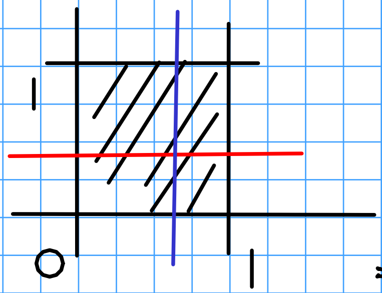
$$= \int_K dx \int f(x,y)\,dy$$

(Kの位置はいろいろ)

といくつかの表記法がある。

この積分は次のようにして計算する。

例　$K = [0,1] \times [0,1]$



$$\iint_K 1\,dx\,dy$$

yは固定

$$= \int_0^1 \left\{ \underbrace{\int_0^1 1\,dx}_{\text{まず}\,x\,\text{で積分}} \right\} dy$$

$$= \int_0^1 [x]_0^1\,dy = \int_0^1 1 \cdot dy$$

$$= [y]_0^1 = 1$$

あるいは

$$= \int_0^1 \left\{ \underbrace{\int_0^1 1\,dy}_{\text{まず}\,y\,\text{で積分}} \right\} dx$$

xは固定

$$= \int_0^1 [y]_0^1\,dx = \int_0^1 1\,dx$$

$$= [x]_0^1 = 1$$

例　$K = [0,x] \times [0,x]$

$$\iint_K e^{-x^2}\,dx\,dy$$

yから積分すると

$$\int_0^x \left\{ \int_0^x e^{-x^2}\,dy \right\} dx$$

$$= \int_0^x \left[y \cdot e^{-x^2} \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^x e^{-x^2} \cdot x\,dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right)$$

一方　x から先に積分しようとすると

$$= \int_0^x \left\{ \int_0^x e^{-x^2} dx \right\} dy$$

これは計算できない。

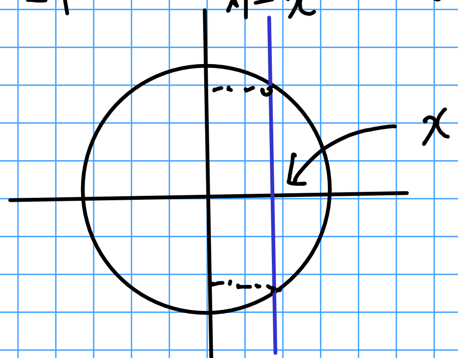
このように x, y どちらか一方ではじめないと計算できないもの、あるいは大きく手間がかかるものがある。

例3.　K：$x^2+y^2 \le 1$ のとき

$$\int_K 1\,dx\,dy$$ を求めよ。

まず x を固定し、y で積分すると

$$\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dy \right\} dx$$



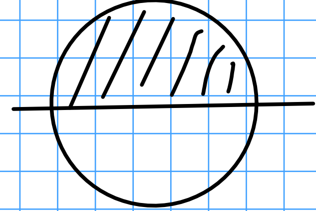
$$= \int_{-1}^{1} \Big[y \Big]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\, dx$$

ここで　$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{Arcsin}\, x\right)$

であるが、積分の定義を考えれば

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx =$



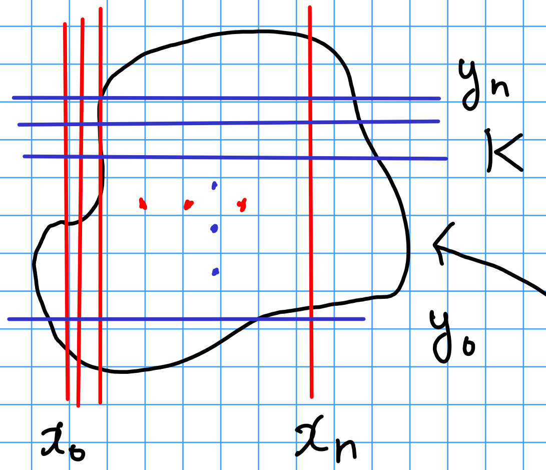
の面積

よって上の定積分

$= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ ← (これも ~~円の面積~~ 高さ1の円柱の体積)

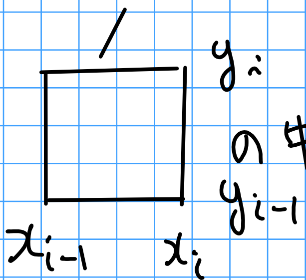
重積分の本来の定義.

$\iint_K f(x,y)\, dx$ の本来の定義はまず K を縦，横に細かく分割する。



$$\iint_K f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=0}^{n} f(a_i,b_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

但し (a_i, b_j) は



の中の点

(細分した長方形の1つ)

又 和は □ が K に含まれるものにわたって取る。

定理

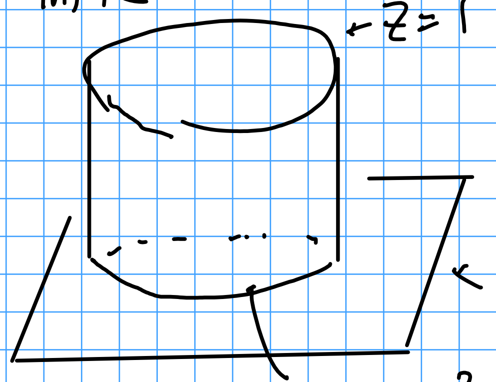
$f(x,y)$ が K で連続ならば

$$\iint_K f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)\,dy\right\}dx$$

$$= \int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\}dy$$

のように、どちらか一方の変数を固定し別の一方を積分することで計算できる

補足



$z=1$ のグラフは xy平面に平行な面

$K: x^2+y^2 \leq 1$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ のグラフは 上半球