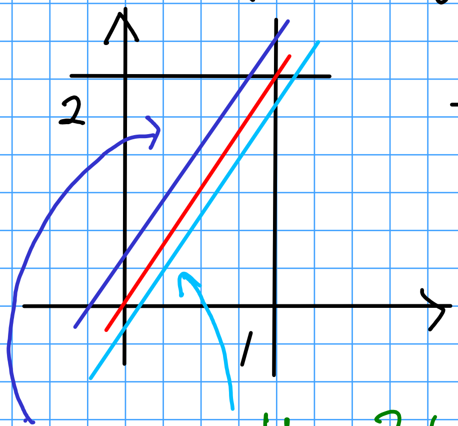
授業の内容のまとめ (期末の範囲)

- 重積分の計算
- 広義重積分 $\rightsquigarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ がわかる.
- 立体の体積, 表面積
- 線積分, Stokes の定理

問1. $\iint_K \frac{1}{\sqrt{|2x-y|}}\,dxdy$ を求めよ.



$\frac{1}{\sqrt{|2x-y|}}$ は左の赤に沿って発散している.

そこで, 発散している所をさけた領域を取って考える. ここでは

$K_1=\{0 \leqq y \leqq 2x-\varepsilon\}$

$K_2=\{2x+\delta \leqq y \leqq 2\}$

まず K_1 上では

$$\int_{K_1}\frac{1}{\sqrt{2x-y}}\,dxdy$$

$$=\int_0^1\left\{\int_0^{2x-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2x-y}}\,dy\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left[-2\sqrt{2x-y}\right]_0^{2x-\varepsilon}dx$$

$$=\int_0^1\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{2x}\right)dx$$

$$=\left[-2\sqrt{\varepsilon}\,x+2\cdot\frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=-2\sqrt{\varepsilon}+\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2}$$

又 $\int_{K_2} \frac{1}{\sqrt{|2x-y|}}\, dxdy$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_{2x+\delta}^{2} \frac{1}{\sqrt{y-2x}}\, dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2\sqrt{y-2x} \right]_{2x+\delta}^{2} dx$$

$$= \int_0^1 \left(2\sqrt{2-2x} + 2\sqrt{\delta} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(2-2x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\delta}\, x \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\delta}$$

あわせて

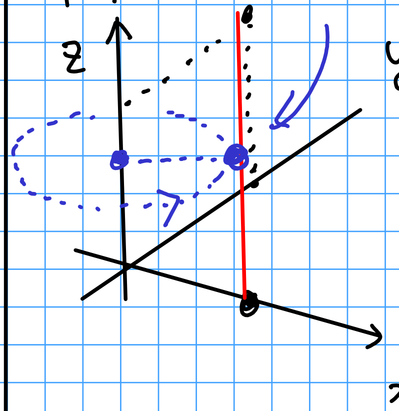
$$\int_{K_1+K_2} \frac{1}{\sqrt{|y-2x|}}\, dxdy = \frac{4}{3} \cdot 2^{3/2} + 2\sqrt{\delta} - 2\sqrt{\varepsilon}$$

$\delta, \varepsilon \to 0$ とすれば

$$\int_K \frac{1}{\sqrt{|y-2x|}}\, dxdy = \frac{4}{3} \cdot 2^{3/2}$$

問2.

z = k との交点



回転して出来る立体のグラフの式を求める。

そのために線分の点を $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}(1-t)$ とおく。（線分を $t : 1-t$ に内分する点）

$z = k$ での切り口は 線分の点が

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\1-t\\1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}?\\?\\k\end{pmatrix}$$

のようにあらわされるので $t = 1-k$

切口は半径 $(1-k)^2 + k^2$

よって

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$$
$$=1-2z+2z^2$$

表面積の公式は　$z=f(x,y)$ というグラフに関して

$$\int_K \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx$$

そこで上の式を z の式に直す。

$$x^2+y^2=2(z^2-z)+1$$
$$=2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$
$$z-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)}$$

or.

$$z-\frac{1}{2}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)}$$

まず下の場合について計算する。

このとき　$0\leqq z\leqq\frac{1}{2}$

$$K=\left\{\frac{1}{2}\leqq x^2+y^2\leqq 1\right\}$$

$$f_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-\frac{1}{2}}}$$

$$f_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-\frac{1}{2}}}$$

よって

$$\int_K\sqrt{1+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-\frac{1}{2}}}\,dx\,dy$$

$$=\int_K\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\frac{1/2}{x^2+y^2-\frac{1}{2}}+1}\,dx\,dy$$

$$=\int_K\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2-\frac{1}{2}}}\,dx\,dy$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと,

$$\int_{K'} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r^2 - \frac{1}{2}}}\; r\,dr\,d\theta$$

※ 以下 2ページ先を参照.

- Stokes の定理

C を閉曲線, $h(x,y)$, $g(x,y)$ は

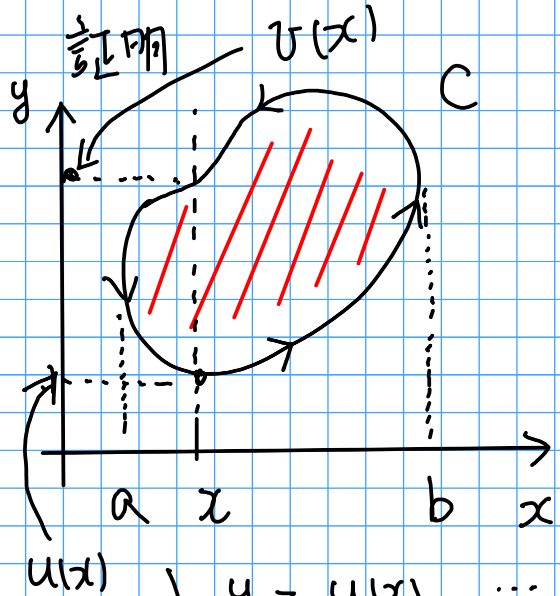
C の内部 D で連続とする.

このとき

$$\int_C h(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

$$= \iint_D ?\frac{\partial h}{\partial y} \;?\; \frac{\partial g}{\partial x}\,dx\,dy$$

証明



$$\int_C h(x,y)\,dx$$

を考える.

$a \leqq x \leqq b$ で

$$\begin{cases} y = u(x) & \cdots \text{下の部分} \\ y = v(x) & \cdots \text{上の部分} \end{cases}$$

とおくと,

$$\int_C h(x,y)\,dx = \int_a^b h(x, u(x))\,dx$$

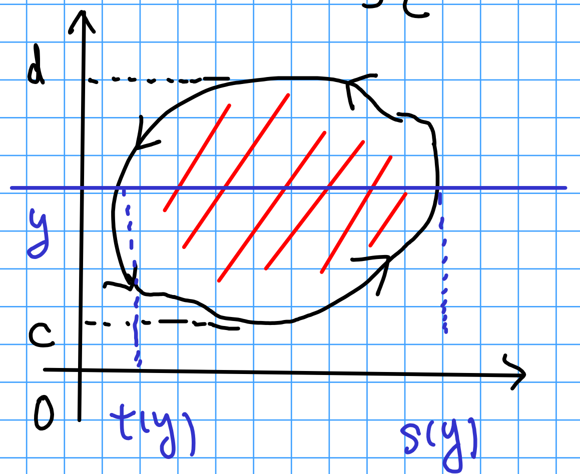
$$- \int_a^b h(x, v(x))\,dx$$

$$= \int_a^b - \{h(x, v(x)) - h(x, u(x))\}\,dx$$

$$= \int_a^b \left\{ -\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial h}{\partial y}\, dy \right\} dx$$

$$= \iint_D -\frac{\partial h}{\partial y}\, dx dy$$

次に $\int_C g(x,y)\, dy$ について



$x = s(y)$ 右側

$\;\;= t(y)$ 左側

とすれば

$$\int_C g(x,y)dy = \int_c^d g(s(y),\, y)\, dy + \int_d^c g(t(y),\, y)\, dy$$

$$= \int_c^d \{ g(s(y),y) - g(t(y),y) \}\, dy$$

$$= \int_c^d \left\{ \int_{t(y)}^{s(y)} \frac{\partial g}{\partial x}\, dx \right\} dy$$

$$= \iint_D \frac{\partial g}{\partial x}\, dx dy$$

※ 続き.

求める表面積は

$$\iint_D \sqrt{\frac{3r^2-1}{2r^2-1}}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$D:\ \left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]\times[0,2\pi]$$

となる. θ で先に積分すると

$$= 2\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{\frac{3r^2-1}{2r^2-1}}\,r\,dr$$

$r^2 = t$ とおけば

$$= 4\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{3t-1}{2t-1}}\,dt$$

$u=\sqrt{\dfrac{3t-1}{2t-1}}$ とさらにおきかえて,

$$= 4\pi\int_{\infty}^{\sqrt{2}} u\cdot t'(u)\,du$$

$$= 4\pi\left\{\Big[u\,t(u)\Big]_{\infty}^{\sqrt{2}} - \int_{\infty}^{\sqrt{2}} t(u)\,du\right.$$

$t(u) = \dfrac{u^2-1}{2u^2-3}$ より

$$= 4\pi\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\pi\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}\left\{\frac{1}{u-\sqrt{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{u+\sqrt{\frac{3}{2}}}\right\}du$$

$$=2\sqrt{2}\pi+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}\left[\log\frac{u-\sqrt{\frac{3}{2}}}{u+\sqrt{\frac{3}{2}}}\right]_{\sqrt{2}}^{\infty}$$

$$=2\sqrt{2}\pi+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\sqrt{2}\pi+\frac{\sqrt{6}}{6}\pi\log(7+4\sqrt{3})\ /\!/$$