微積分の基本定理の多変数版.

1変数での微積分の基本定理とは

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

となる $F(x)$ をみつけるためには

$$F'(x) = f(x)$$

を探せばよい —— というものであり, 又

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

でもあった. これを2変数に拡張すると

前者は

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が与えられたとき,

どうやって $f(x, y)$ をもとめるか?

後者は直接述べるのは難しい.

・Stokesの定理.

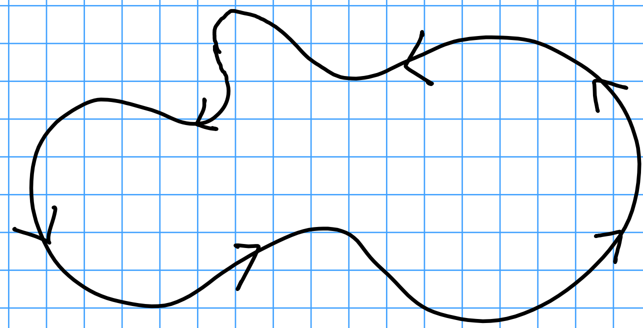
定義 線積分

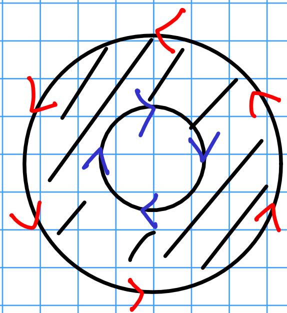
$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

C は向きのついた曲線.

但し閉曲線の場合内部を左手に

見て進む向き.





"内部"は指定する必要がある.

さて 実際の計算は

$$C : (\overset{x}{\cancel{f}}(t),\ \overset{y}{\cancel{g}}(t)) \quad a \leqq t \leqq b \text{ で}$$

あらわされているとき,

$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt + g(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt$$

例 $$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

は Cの点が $(\cos 2t, \sin 2t)$
$(0 \leqq t \leqq \pi)$

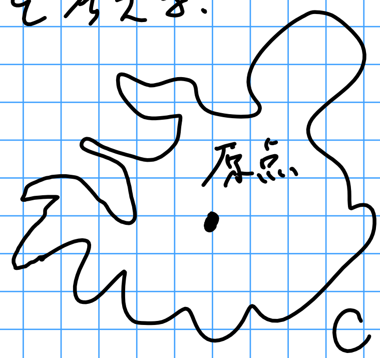
とおけば

$$\int_0^\pi \frac{-\sin 2t}{\cos^2 2t + \sin^2 2t}(-2\sin 2t)\,dt + \frac{\cos 2t}{\cos^2 2t + \sin^2 2t}\,2\cos 2t\,dt$$

$$= \int_0^\pi 2\,dt = 2\pi$$

※ Cの点を $(\cos t, \sin t)$ とおいても結果は同じ。このように円という形と向きさえ同じであれば値は同じとなるので線積分は上のような書き方をする。

さて原点のまわりを1回まわる閉曲線Cを考える。



$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= 2\pi$$

これを示すために Stokes の定理を紹介する。

定理 (Stokesの定理)

$f(x,y)$, $g(x,y)$ が閉曲線 C の内部で連続ならば,

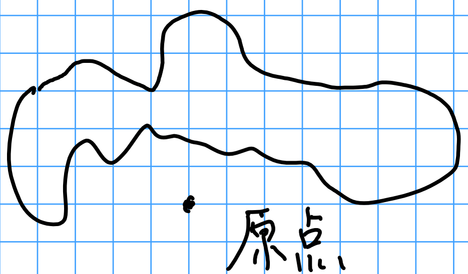
$$\int_C f\,dx + g\,dy = \iint_D (-f_y + g_x)\,dxdy$$

D ← Cの内部

(教科書 p382)

ただし $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ $g_x = \dfrac{\partial g}{\partial x}$

この定理をみとめると例えば C として原点を含まない閉曲線を考える.



$$\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

において定理の f, g に相当する部分は C の内部で連続

よって Stokesの定理より,

$$= \iint_D (-f_y + g_x)\,dxdy$$

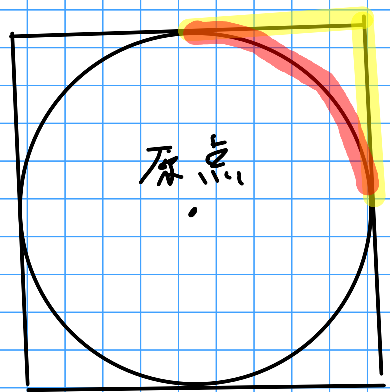
$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$g_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

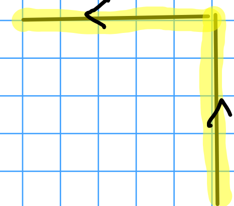
同じ

より

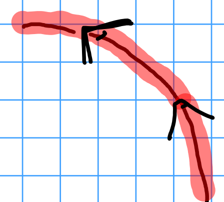
$$= \iint_D 0\,dxdy = 0$$



これらを右の



にそって積分するのは



等しい

Stokesの定理は標語的に

Dの上の重積分を境界Cでの

積分におきかえるもの

と言える。

・完全微分

次の問題を考える

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y)$$

となる関数 $f(x,y)$ は存在するか？

定理. $$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

かつ $\frac{\partial g}{\partial y}$ （よって $\frac{\partial h}{\partial x}$）が全平面で連続

ならば

このような f は存在し

$$f(x,y) = \int_C h\,dx + g\,dy$$

ただしCは $(0,0)$ と (x,y) を結ぶ

任意の曲線.