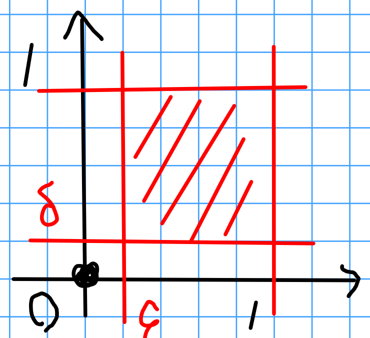
前回　2008. Dec. 12.

重積分でも（2変数以上の積分でも）広義積分を考えることができる．しかし2変数の場合，収束を正しく見きわめるのは少し難しい．

例　$f(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ を考える．

$f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で発散する．が，まず次の積分を考える．

$$\int_\delta^1\left\{\int_\varepsilon^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right\}dy$$



↑
原点で ∞ となるので原点をさけた領域で近似している．

なお $f(x,y)$ は

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Arctan}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathrm{Arctan}\frac{y}{x}=\frac{-1\cdot(x^2+y^2)-(-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Arctan}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

で作った関数なので　左の積分は，

$$(\mathrm{Arctan}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\int_\delta^1\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_\varepsilon^1 dy=\int_\delta^1\left\{\frac{1}{1+y^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\right\}dy$$

$$=\left[\mathrm{Arctan}\,y\right]_\delta^1-\int_\delta^1\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\,dy$$

$$= \mathrm{Arctan}\,1 - \mathrm{Arctan}\,\delta - \int_\delta^1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\,dy$$

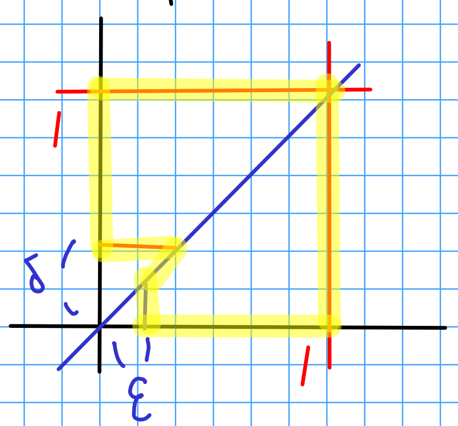
ここで $\varepsilon, \delta \to 0$ とすると

$$0 \leqq \int_\delta^1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\,dy \leqq \int_\delta^1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\,dy = \varepsilon(1-\delta)$$

より

$$= \mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4} \quad \left(\tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$$

なお p346 では 左のような領域



で積分すると

$$\frac{1}{2}\log\frac{\varepsilon}{\delta}$$

となることが示されている。

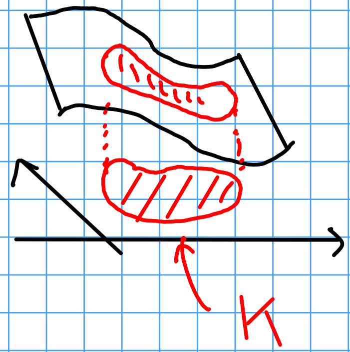
よって $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ として $\varepsilon, \delta \to 0$

とすれば、極限は $\frac{1}{2}\log 2$

$\delta = 2\varepsilon$ のときには 極限は $\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$

グラフの表面積

$z = f(x, y)$ のグラフを領域 K で



切り取った部分の面積

は次の式で与えられる。

$$\iint_K \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

例 原点を中心とする半径 a の球

をグラフに持つ関数は

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

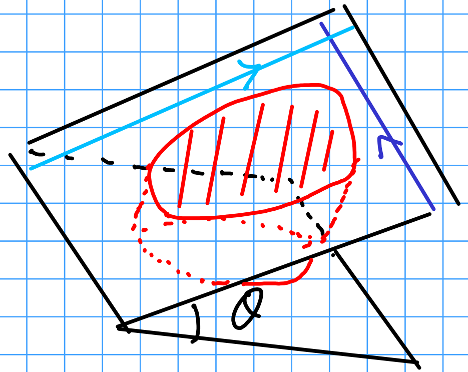
となる。このグラフの $x^2+y^2 \leqq a^2$ で

切り取られる部分が半球となる。

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \right)$$

この公式を説明するために2つの事項を確認する。

①

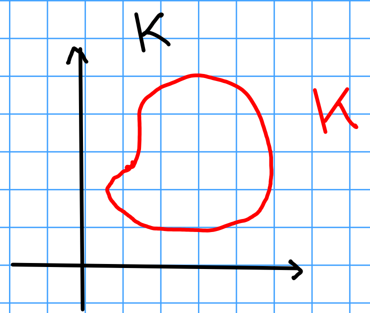


上の図形の面積を S_1

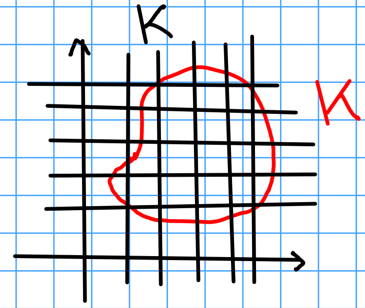
下 〃 S_2 とすると

$$S_2 = S_1 \cos\theta$$

② $\iint f(x,y)\,dxdy$ の定義は



領域Kを細かく正方形でくぎり、

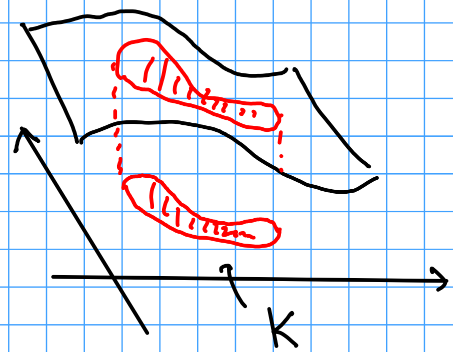


各正方形の中から1点ずつ (x_{ij}, y_{ij}) を取り

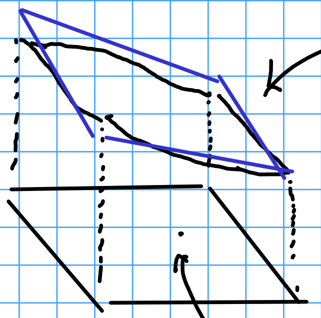
和 $\displaystyle\sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \times \left\{ (i,j)\text{番目の正方形の面積} \right\}$

を考え、区切りをかぎりなく細かくしたもの、である。

さて表面積の公式に戻ると、まずKを細かい正方形でくぎる。



1つ正方形を取る。



グラフを正方形で切ったもの.

点 (x_{ij}, y_{ij}) でのグラフの接平面は

$$z - f(x_{ij}, y_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_{ij}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_{ij})$$

この接平面の正方形で切られた部分とグラフの切り取られた部分を同一視する. この接平面の切り取られた部分の面積は

$$(\text{Fの正方形の面積}) \times \frac{1}{\cos\left(\text{接平面と正方形のなす角}\right)}$$

ここで $\cos(\cdots)$ は

内積

$$\cos(\cdots) = \frac{(0,0,1)\cdot(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{(-f_x)^2+(-f_y)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$$

よって

$$(\text{接平面の切り取られた部分}) = (\text{Fの正方形の面積}) \times \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$$

これを全ての切った正方形に対して足し合わせたものが, 表面積であり,

$$\sum_{i,j} \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} \times \{\text{正方形の面積}\}$$

よって 表面積 $= \iint_K \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$

となる.