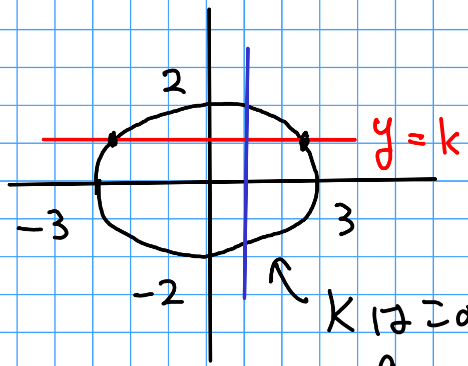
問1.

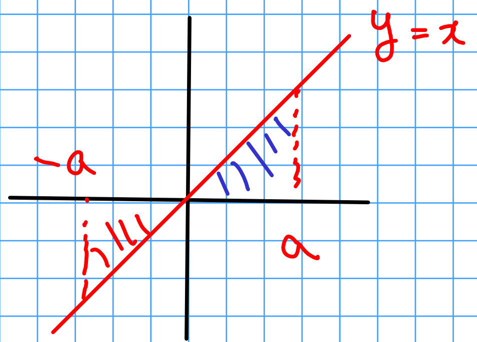
$$\iint_K x\,dxdy$$



Kはこの楕円の内部

① $$= \int_{-2}^{2}\left\{\int_{-a}^{a} x\,dx\right\}dy$$

$$\frac{a^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad a=3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}$$



{ }の内部の積分は奇関数なので積分の値は 0.

よって

$$=\int_{-2}^{2} 0\,dy = 0.$$

② $$= \int_{-3}^{3}\left\{\int_{-b}^{b} x\,dy\right\}dx$$

$$b = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$$

$$= \int_{-3}^{3} x\left\{\int_{-b}^{b} dy\right\}dx$$

$$= \int_{-3}^{3} x\,2b\,dx = \int_{-3}^{3} 4x\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,dx$$

積分の中の関数を $y=g(x)$ とおけば,

$$g(-x) = 4(-x)\sqrt{1-\frac{(-x)^2}{9}}$$

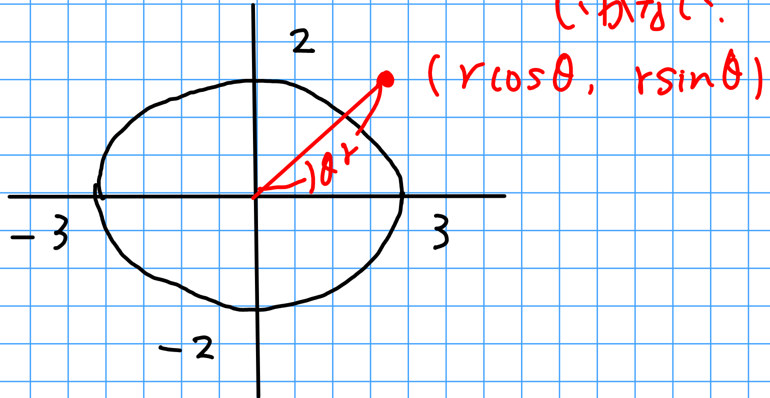
$$= -4x\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = -g(x)$$

グラフは原点対称なので

求める積分の値は 0.

③ $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$ とおきかえて考える.

$(x, y) \in K \Leftrightarrow$ 上のようにおくとうまくいかない.



そこで $x = 3r\cos\theta,\quad y = 2r\sin\theta$

とおきかえれば

$$(x, y) \in K \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqq r \leqq 1 \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \end{cases}$$

このとき $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos\theta & -3r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となるので

$|\det J| = 6r$ ← $0 \leqq r \leqq 1$ より絶対値はとれる.

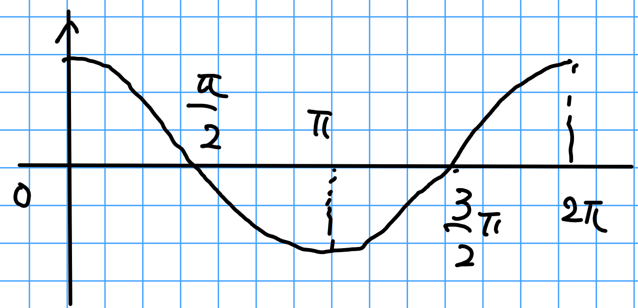
よって求める積分は

$$\iint_{K'} 3r\cos\theta \cdot 6r \cdot dr\,d\theta$$

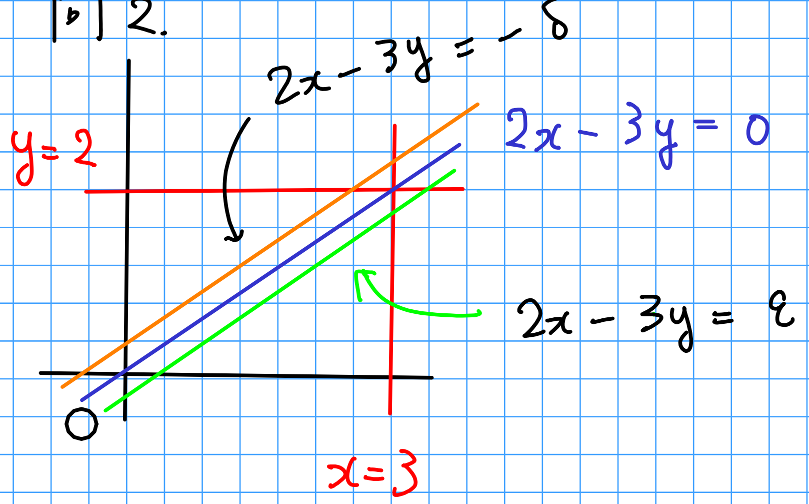
$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 18r^2\cos\theta\, dr \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[6r^3\cos\theta \right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 6\cos\theta\, d\theta = 0$$ (下のグラフより)



問2.



積分の中の関数は $2x-3y=0$ に沿って発散している。正の数 ε, δ に対して

$A(\varepsilon) = \left(x\text{軸}, x=3, 2x-3y=\varepsilon \right.$ で囲まれた領域 $\left.\right)$

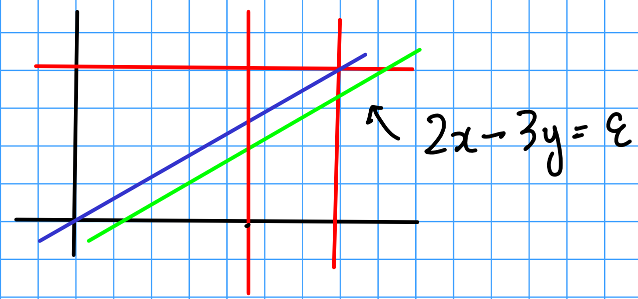
$B(\delta) = \left(y\text{軸} \quad \cdots\cdots \right)$

を考え、重積分

$$\iint_{A(\varepsilon)} \frac{dxdy}{\sqrt{2x-3y}} + \iint_{B(\delta)} \frac{dxdy}{\sqrt{3y-2x}}$$

を考える。まず前者は

$$\iint_{A(\varepsilon)} \frac{dxdy}{\sqrt{2x-3y}} = \int_0^3 \left\{ \int_0^{\frac{1}{3}(2x-\varepsilon)} \frac{dy}{\sqrt{2x-3y}} \right\} dx$$



$$\left(\sqrt{2x-3y}\right)' = -3\frac{1}{\sqrt{2x-3y}} \cdot \frac{1}{2}$$

より上の積分は

$$= \int_0^3 \left\{ \left[-\frac{2}{3}\sqrt{2x-3y} \right]_0^{\frac{1}{3}(2x-\varepsilon)} \right\} dx$$

$$= \int_0^3 \left\{ -\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon} + \frac{2}{3}\sqrt{2x} \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3$$

$$= -2\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{9}6^{\frac{3}{2}}$$

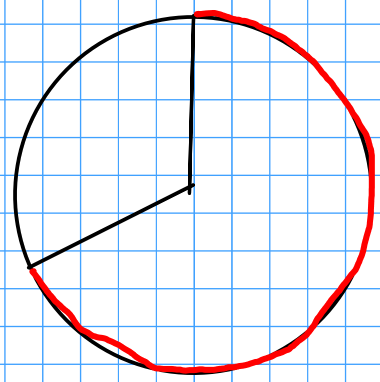
よって 前者は $\varepsilon \to 0$ としたとき $\frac{1}{9}6^{\frac{3}{2}}$ に収束する。後者も同様。

※ 採点のポイント。

1. 発散する点を押さえているか？
2. 発散する点を除いた領域をきちんと設定できているか？
3. 収束しているかきちんと示されているか？

問3.

出来た立体は底面の半径が1，高さが2の円すいとなる。これを切り開くと、



左のようなおうぎ型ができる。このおうぎ型の半径 $\sqrt{5}$ であり、中心角を θ とすると、

$$\sqrt{5}\,\theta = 2\pi$$

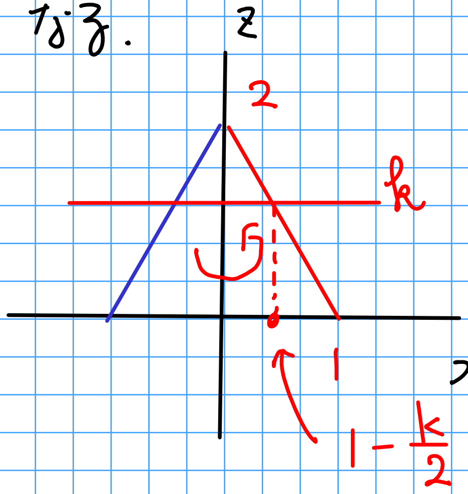
よって $\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ おうぎ型の面積は

$\frac{1}{2} \times (\text{半径})^2 \times (\text{中心角})$ ← ラジアン.

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\pi$$

表面積を求める公式を使って以下のように

なる。



まず回転体のグラフの式を求める。回転体を $z=k$ で切ると、切り口は半径 $1-\frac{k}{2}$ の円。よって

$$x^2+y^2=\left(1-\frac{k}{2}\right)^2$$

$k \leqq 2$ に注意して上の式を k について解けば

$$k=2-2\sqrt{x^2+y^2}$$

よって円すいのグラフの式は

$$z=2-2\sqrt{x^2+y^2}$$

これから求める面積は

$$\iint_S \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

$$S : x^2+y^2 \leqq 1$$

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

以上を代入すると

$$=\iint_S \sqrt{1+\frac{4x^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\iint_S \sqrt{5}\,dxdy=\sqrt{5}\iint_S 1\,dxdy$$

一般に $\iint_S 1\,dxdy=$ (Sの面積)

$$=\sqrt{5}\pi$$ //