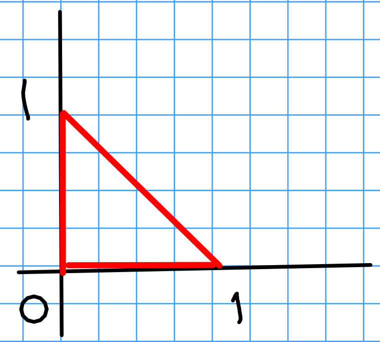
線積分

$$\int_C -y\,dx$$

C は右の曲線



この計算をするために C を次のように表す。

$$(f(t), g(t)) = \begin{cases} 0 \leqq t \leqq 1 & (t, 0) \\ 1 \leqq t \leqq 1+\sqrt{2} & \left(1-\frac{t-1}{\sqrt{2}}, \frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) \\ 1+\sqrt{2} \leqq t \leqq 2+\sqrt{2} & (0, 2+\sqrt{2}-t) \end{cases}$$

（t が C 上を動く速度を 1 にした。）

こうおくと求める線積分は

$$= \int_0^1 -0 \cdot 1 \cdot dt + \int_1^{1+\sqrt{2}} -\frac{t-1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt$$

$$+ \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} -(2\sqrt{2}-t) \cdot 0 \cdot dt$$

$$= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{2}(t-1)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}(t-1)^2\right]_1^{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

先週は C を異なるおき方

$$(f(t), g(t)) = \begin{cases} 0 \leqq t \leqq 1 & (t, 0) \\ 1 \leqq t \leqq 2 & (2-t, t-1) \\ 2 \leqq t \leqq 3 & (0, 3-t) \end{cases}$$

で同じ値をだした。このように線積分では C をどのように表すかに値はよらない。

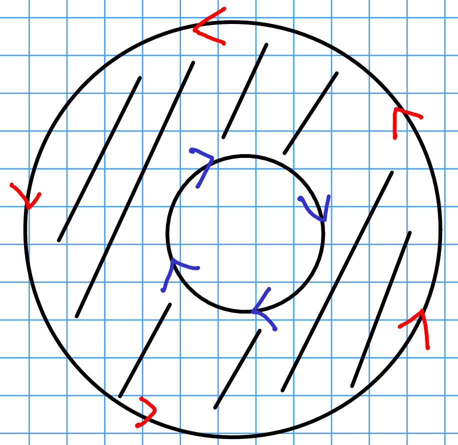
ただし向きには気をつけること。

そこで

$$\int_C -y\,dx$$

のような書き方が許される。

正の向きは内部を左手について見る向き.



左図での正の向きは

外側…左まわり

右側…右まわり

例

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

$$C: x^2+y^2=1.$$

を計算してみる. 今回は C を

$$(f(t), g(t)) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

とおいて計算する.

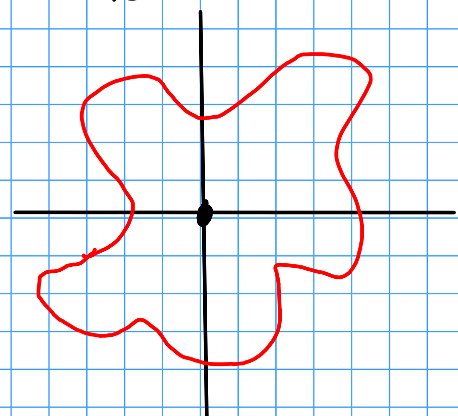
$$\int_0^\pi \frac{-\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}\cdot 2(-\sin 2\theta) + \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}\cdot 2\cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{2\sin^2 2\theta + 2\cos^2 2\theta}{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} d\theta$$

$$= \int_0^\pi 2\, d\theta = 2\pi$$

この場合にも線積分の値は 2π となった.

実は原点のまわりを一周するどんな



曲線 C に対しても

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi$$

何故こんなことが言えるのか?

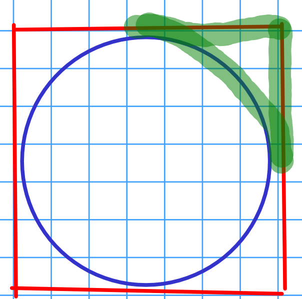
定理 (Stokes (Green) の定理)

関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が領域 K で微分可能であり, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ が連続とすると

$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_K \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dxdy$$

(教科書 p382 (5))

これを認めて考察を続けると



で表される曲線を C' とする.

C' によって囲まれる領域で

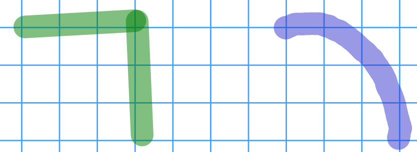
$$f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

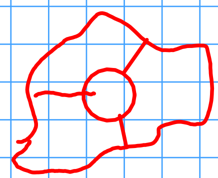
よって

$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dx = \iint_K 0 \cdot dxdy = 0$$

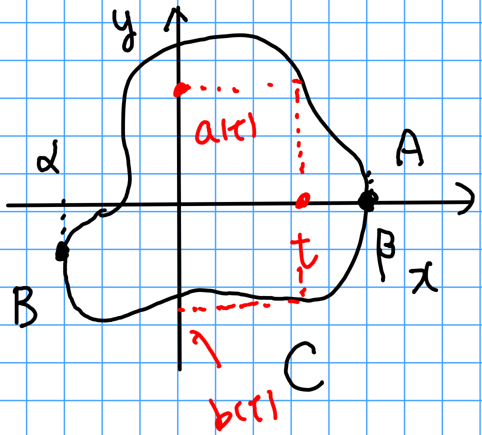
よって



の2つの経路に沿って積分したときの値は等しい.



Stokesの定理の証明



CがAB間の上側では

$$(f(t), g(t)) = (-t,\ a(\cancel{t}\,{-t}))$$

$$\alpha \leqq \cancel{t}\,{-t} \leqq \beta$$

下側では

$$(f(t), g(t)) = (\cancel{-t}\,t,\ b(t))$$

$$\alpha \leqq t \leqq \beta$$

と表せたとして考える。すると

$$\int_C f\,dx$$

$$= \int_{-\beta}^{-\alpha} f(-t, a(-t))\,(-1)\,dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t, b(t))\,1\cdot dt$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} f(t, a(t))\,(-1)\cdot(-1)\,dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t, b(t))\,dt$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} f(t, a(t))\,dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t, b(t))\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} -\{f(t, a(t)) - f(t, b(t))\}\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} -\left\{\int_{b(t)}^{a(t)} \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy\right\}\cdot dt$$

$$= \iint_K -\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\cdot dt$$

KはCの内部の領域.

$$\int_C g\,dy = \iint_K \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy$$

も同様に示せる.

微積分の基本定理.

1変数では.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

2変数でこれをやろうとすると

$f(x,y)$ ‥‥ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

微分が2つある.

単純に多変数化はできない. 1つのやり方として

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が与えられたとき,

f は存在するか, 又どうやって求めるか

について考えてみよう.

例

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x$$

となるような f は存在しない. 何故なら

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

($\dfrac{\partial f}{\partial x}$ から計算) ($\dfrac{\partial f}{\partial y}$ から計算)

上の例から $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g(x,y)$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = h(x,y)$

が与えられたとき,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

が必要条件であることがわかる. しかし,

これは十分条件ではない.

定義 領域 K が単連結とは

K の内部の全ての円が1点につぶせる

ことを言う.

定理　K を単連結な領域とし

$h(x,y)$, $g(x,y)$ を K で微分可能な関数とする.

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

であれば, 関数 $f(x,y)$ で

$$\frac{\partial f}{\partial x} = h \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = g$$

となるものが存在する.

∵　K の 1 点 (a,b) を取り, 線積分

$$\int_C h\,dx + g\,dy$$

ただし C は (a,b) と (x,y) を結ぶ曲線.