重積分においても 広義積分を考えることができる。

例 $\displaystyle\iint_K \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

この関数は $x=y=0$ で ∞ となるが、積分の値は存在する。

しかし、一変数の場合と異なり、どのような場合に存在するか？はかなり複雑である。

例 $\displaystyle\iint_K \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy \quad K=[0,1]\times[0,1]$

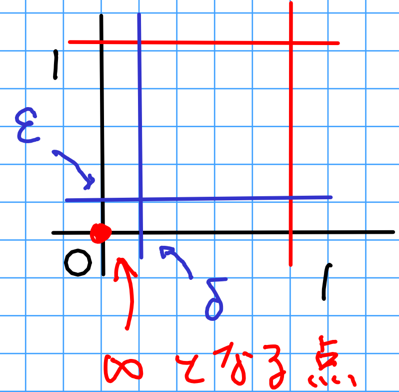
この積分の中の関数は $x=y=0$ で発散する。又 $g(x,y)=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ とおくと、

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$$ ←積分の中の関数。

さて、この積分を x から先に積分してみよう。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\left\{\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\right\}dy$$



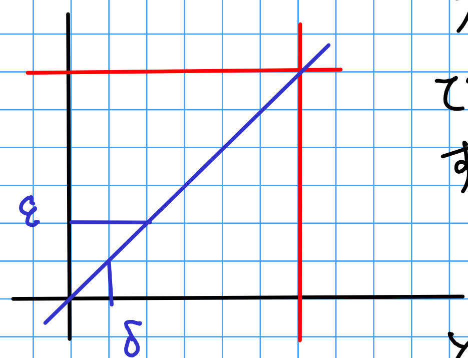
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{x}{y^2+x^2}\right]_\delta^1 dy$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{y^2+1}\,dy$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\mathrm{Arctan}\,y\Big]_\varepsilon^1$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

次に



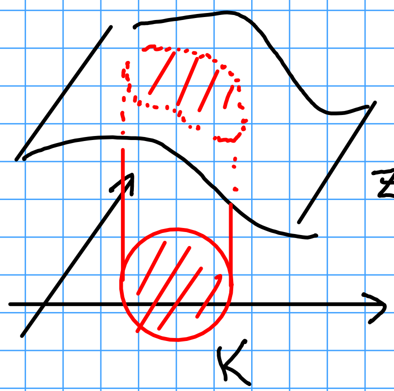
左のように2つの分形でKを近似して積分すると、

$$\frac{1}{2}\log\frac{\delta}{\varepsilon}$$

となる (p346)

表面積

まず $z=f(x,y)$ のグラフの領域 K で切り取られた部分の面積 S は



$z=f(x,y)$ のグラフ

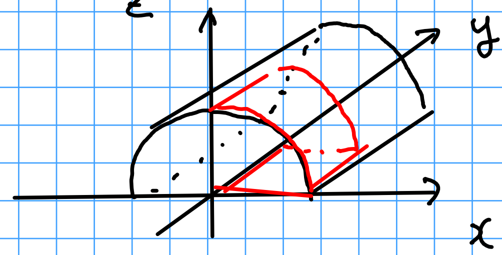
$$S = \iint_K \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

で与えられる。 (p 362) ここで

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

例 $z=\sqrt{1-x^2}$ $\quad K=[0,1]\times[0,1]$

このとき、



求める面積は $\frac{\pi}{2}$ であるが、これを先の式を使って計算してみよう

$$f_x = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_y = 0$$

よって

$$\iint_K \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

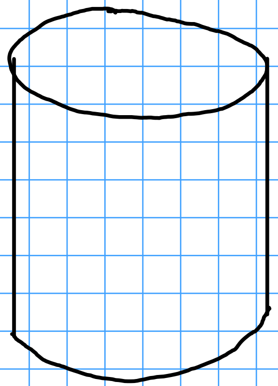
$$= \iint_K \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx\,dy$$

$$= \iint_K \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\mathrm{Arcsin}\,x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

※ 表面積は自然に定まるものではない。

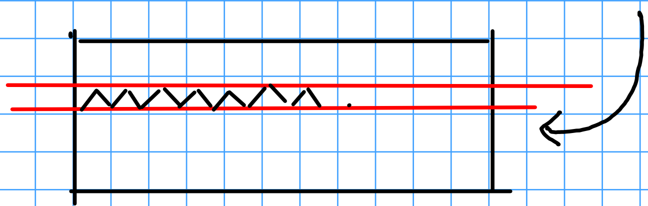


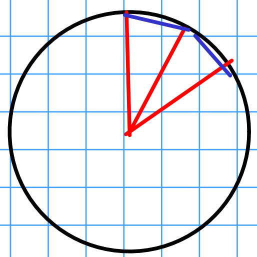
底面の半径 1

高さ 1

の円柱を考える。この柱の側面の"表面積"を考える。

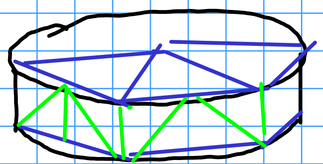
そこで円柱を横に m 等分





中心に n 等分し、

各頂点を結び切片を分割して得られる3角形たちを考える。



この3角形たちの面積の総和は

$$S_{m,n} = 2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+4\left(\frac{m}{n^2}\right)^2\left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4}$$

$m=n$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} 2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+4\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4}$$

$\pi\cdot\frac{n}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$

$$= 2\pi$$

$m=n^2$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} 2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+4\left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4}$$

$$= 2\pi\sqrt{1+\frac{\pi^4}{4}}$$

$m=n^3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} 2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+n^2\left(n\cdot\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4}$$

$$= \infty$$