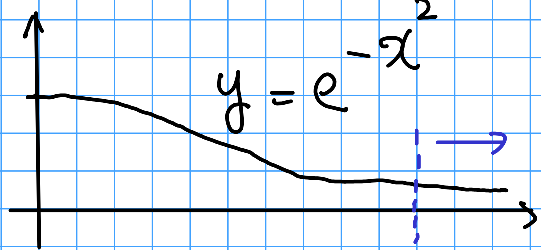
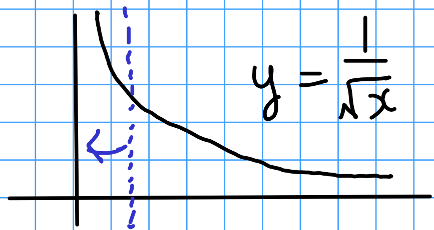
1変数の積分では

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$



積分区間が有限でない

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



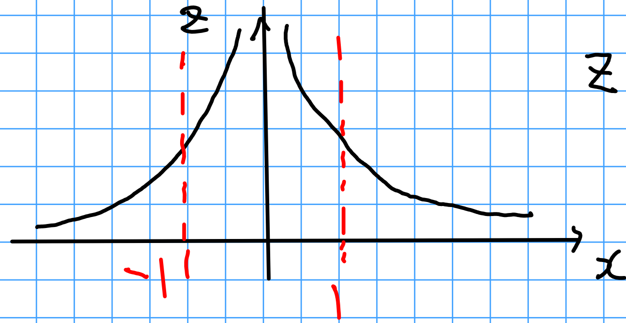
積分区間でグラフの天井が抜けている。

このような場合でも広義積分という形で積分を定義した。重積分においてもこれらに対応する"広義重積分"を考えることがある。

例) $z=f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とする。

この関数のグラフは、例えば $y=0$ (xz平面)で切ると、

$$z=\frac{1}{\sqrt{x^2+0^2}}=\frac{1}{|x|}$$



$z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ のグラフは左のグラフをz軸を中心に回転させたもの

さて

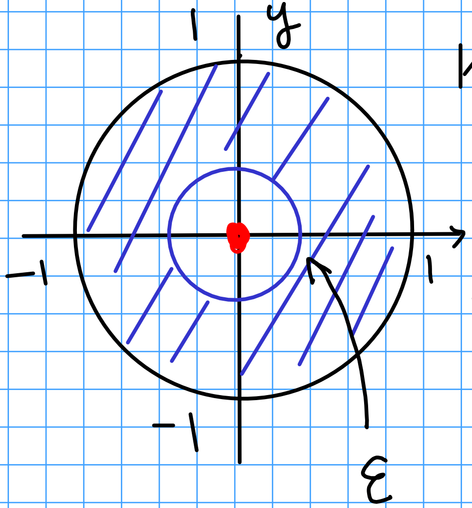
$$\iint_K \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad K=\{x^2+y^2\leq 1\}$$

について考えてみよう。この重積分の中の関数

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

は $(0,0)$ で発散する。

1変数では積分する範囲を発散する点を除くように取り、極限を取った。



K　それにならって

Kから半径εの小円を除いた領域

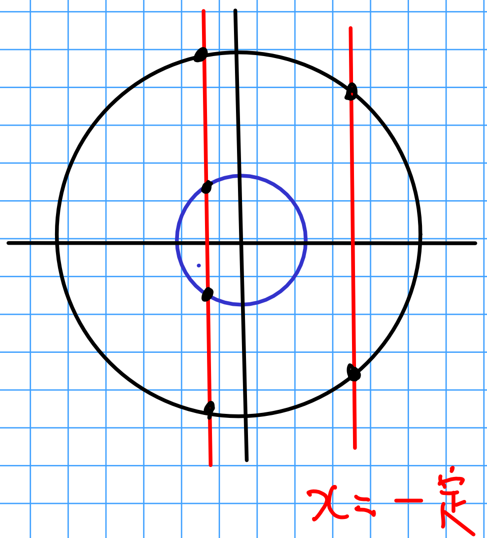
$K_\varepsilon = \{ \varepsilon^2 \le x^2 + y^2 \le 1 \}$

の上で積分し $\varepsilon \to 0$

としてみよう。ここで

$$\iint_{K_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

をまともに計算しようとすると、xが



$-1 \sim -\varepsilon$

$-\varepsilon \sim \varepsilon$

$\varepsilon \sim 1$

の3つにわけて考える必要があり

計算式は

$$\int_{\varepsilon}^{1} \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \right\} dx$$

$$+ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{\varepsilon^2-x^2}} 〃\ dy \right\} dx$$

$$+ \int_{-1}^{-\varepsilon} \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 〃\ dy \right\} dx$$

そこで　$x = s\cos t$　$y = s\sin t$

とおいて考える。

$$(x,y) \in K_\varepsilon \iff \begin{cases} \varepsilon \le s \le 1 \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

この変数のおきかえによって、求める重積分は

$$\iint_{K_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{s^2\cos^2 t + s^2\sin^2 t}} \,|\det J|\,dsdt$$

但し　$J = \begin{pmatrix} \partial x/\partial s & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial s & \partial y/\partial t \end{pmatrix}$　である。

式を整理すれば、

$$= \iint_{K_\varepsilon} \frac{1}{|s|} |s| \, ds\, dt = \iint_{K_\varepsilon} 1 \, ds\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_\varepsilon^1 1 \, ds \right\} dt = \int_0^{2\pi} (1-\varepsilon)\, dt$$

$$= 2\pi (1-\varepsilon)$$

よって $\displaystyle\iint_K \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\, dy$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{K_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\, dy = 2\pi$$

さて、広義重積分を使うことで

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が示せる. この計算方法を述べる前に重積分の性質を1つあげる.

$K \subset K'$　K' で $f(x,y) > 0$ のとき

$$\iint_K f(x,y)\, dx\, dy \leqq \iint_{K'} f(x,y)\, dx\, dy$$

これを利用して

$$I_a = \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2} \, dx\, dy \quad を考える.$$

$$K_a = [0, a] \times [0, a]$$

まず

$$I_a = \int_0^a \left\{ \int_0^a e^{-x^2-y^2} \, dx \right\} dy$$

$$= \int_0^a \left\{ e^{-y^2} \int_0^a e^{-x^2} \, dx \right\} dy$$

$$= \int_0^a e^{-x^2} \, dx \times \int_0^a e^{-y^2} \, dy$$

$$= \left\{ \int_0^a e^{-x^2} \, dx \right\}^2$$

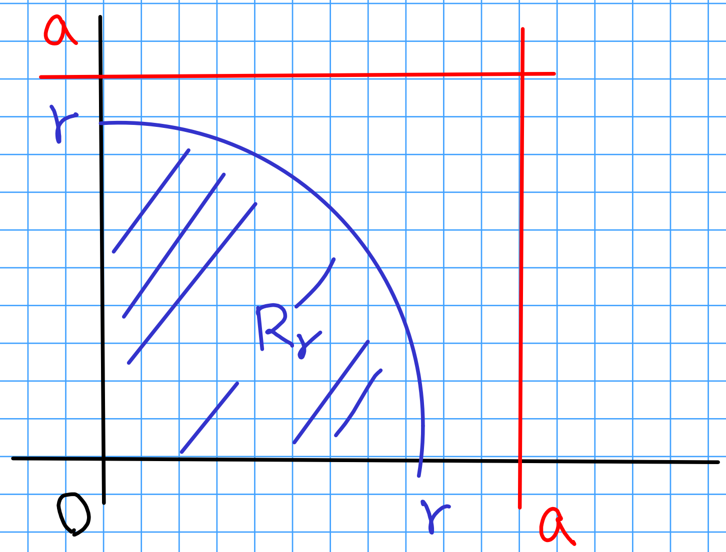
従って

$$\lim_{a \to \infty} I_a = \left\{ \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \right\}^2$$

次に

$$I_a = \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \quad と$$

$$I_r = \iint_{R_r} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \quad を比較する.$$



さて先程の注意より

$$\iint_{R_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leqq \iint_{K_a} (左と同じ)$$

$$\leqq \iint_{R_{\sqrt{2}a}} (左上と同じ)$$

又 $\iint_{R_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$

において $x = s\cos t \quad y = s\sin t$

とおけば

$$(x,y) \in R_a \iff \begin{cases} 0 \leqq s \leqq a \\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

となるので

$$= \iint_{R_a} e^{-s^2} s\,dsdt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^a e^{-s^2} s\,ds \right\} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} \right]_0^a dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-a^2}) = \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$$

同様に $\iint_{R_{\sqrt{2}a}} (\quad) = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$

よって

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \leqq I_a \leqq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$$

$a \longrightarrow \infty$ とすれば

$$\lim_{a\to\infty} I_a = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\lim_{a\to\infty} I_a}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

12/22(月)　8:45〜　レポート返却

＋

彩点請評