重積分の性質

定積分には次のような性質があった.

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\,dx$

$\displaystyle= \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

α, β は定数

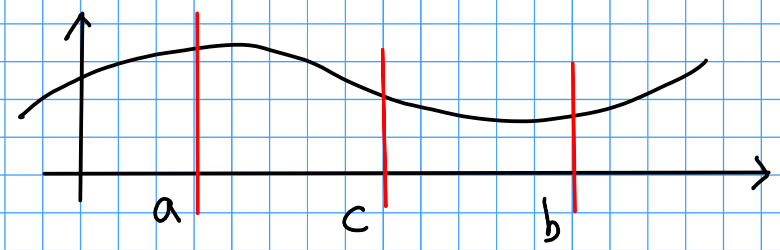
3) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$

これらの性質は

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big($ $x=a, b$, y軸, $y=f(x)$ で囲まれる部分の符号付き面積 $\Big)$

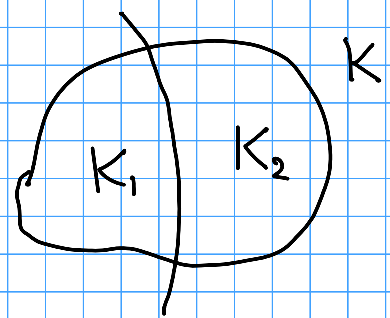
であることを考えれば納得できる.

例 1) では



重積分においては

1) $\displaystyle\iint_K f(x,y)\,dxdy = \iint_{K'} f\,dxdy + \iint_{K''} f\,dxdy$



但し $K = K_1 \cup K_2$ とする.

2) $\displaystyle\iint_K (\alpha f + \beta g)\,dxdy$

$\displaystyle= \alpha\iint_K f\,dxdy + \beta\iint_K g\,dxdy$

α, β は定数

3) $\displaystyle\left|\iint_K f\,dxdy\right| \leqq \iint_K |f|\,dxdy$

4) $\displaystyle\iint_K f(x)g(y)\,dxdy$ $\quad K = [a,b]\times[c,d]$

$\displaystyle= \int_a^b f(x)\,dx \int_c^d g(y)\,dy$

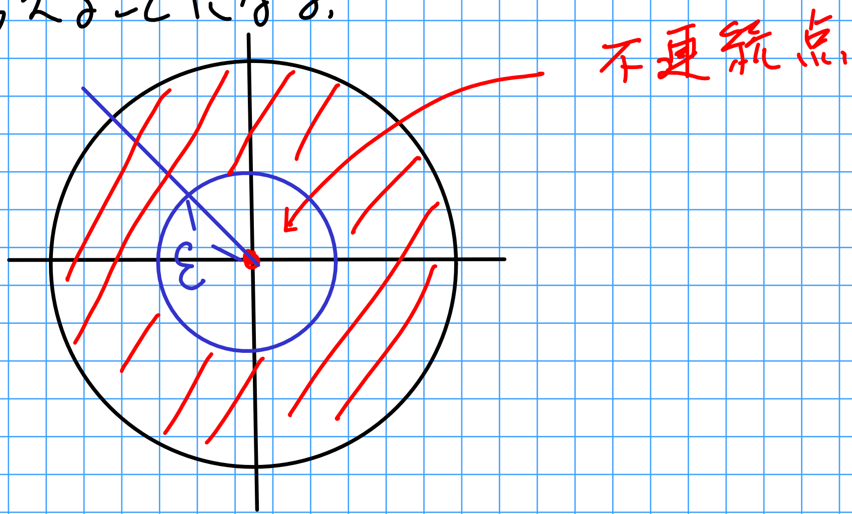
広義重積分

例 $$\iint_K \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy \qquad \begin{cases} 0<\alpha<1 \\ K=\{x^2+y^2\leqq 1\} \end{cases}$$

について考える．この積分では

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = \infty$$

となり原点で連続でない．そこで $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ が連続であるような領域で近似して考えることになる．



半径が ε と 1 の円で囲まれる領域を K_ε とおく．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{K_\varepsilon}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$$

まず $\lim$ の中を計算する．

$x = s\cos t \qquad y = s\sin t$

と置換すると，

$$J = \begin{pmatrix} \partial x/\partial s & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial s & \partial y/\partial t \end{pmatrix}$$

に対し $\det J = s$ となるので

$$= \iint_{K_\varepsilon} \frac{1}{s^{2\alpha}}\cdot s\,ds\,dt$$

$K_\varepsilon : [\varepsilon, 1]\times[0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_\varepsilon^1 \frac{1}{s^{2\alpha-1}}\,ds\right\}dt = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\alpha-2}\left[\frac{1}{s^{2\alpha-2}}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\alpha-2}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2\alpha-2}}-1\right)dt = \frac{2\pi}{2\alpha-2}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2\alpha-2}}-1\right)$$

ここで　$0<\alpha<1$　より　$2\alpha-2<0$

よって　$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{K_\varepsilon}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$

$$=\frac{2\pi}{2-2\alpha}=\frac{\pi}{1-\alpha}$$

広義重積分の応用

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を計算してみよう.

$\displaystyle\int e^{-x^2}dx$ は計算できない. そこで

広義重積分

$$\iint_K e^{-x^2-y^2}dxdy \qquad K: x,y\geqq 0$$

$$\left(=\lim_{a,b\to\infty}\iint_{K_{a,b}}e^{-x^2-y^2}dxdy \qquad K_{a,b}=[0,a]\times[0,b]\right)$$

ここで　$e^{-x^2-y^2}=e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$　より

$$\iint_{K_{a,a}}e^{-x^2-y^2}dxdy=\left\{\int_0^a e^{-x^2}dx\right\}^2$$

よって　$\displaystyle\iint_K e^{-x^2-y^2}dxdy=\left\{\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right\}^2$

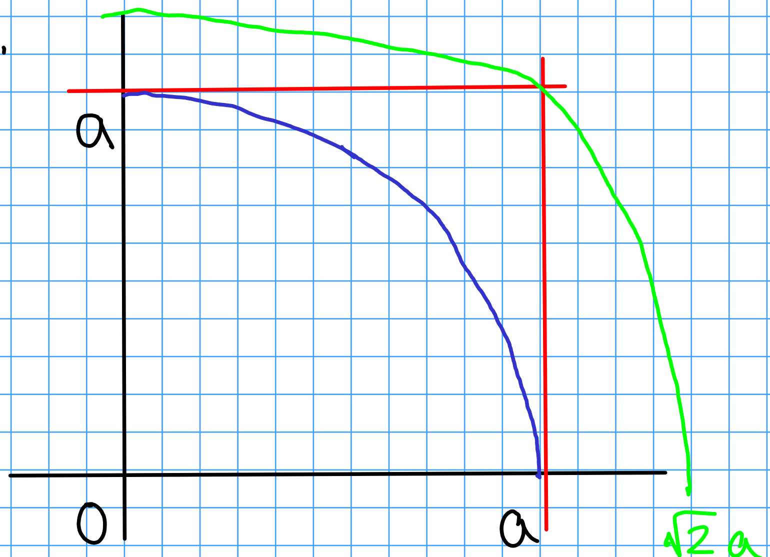
さて　$\displaystyle\iint_{K_{a,a}}e^{-x^2-y^2}dxdy$　も計算できない

そこで

$$\iint_{R_r}e^{-x^2-y^2}dxdy \qquad R_r: x,y\geqq 0\quad x^2+y^2\leqq r^2$$

という重積分を考える.

領域 $K_{a,a}$ と $R_{\sqrt{2}a}$, R_a を図示すると,



よって包含関係 $R_a \subsetneqq K_{a,a} \subsetneqq R_{\sqrt{2}a}$

$e^{-x^2-y^2} > 0$ なので

$$\iint_{R_a} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint_{K_{a,a}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$< \iint_{R_{\sqrt{2}a}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

ここで

$$\iint_{R_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$x = s\cos t \quad y = s\sin t$

とおきかえて計算すると,

$$= \iint_{R'_a} e^{-s^2} s\, ds dt$$

$$R'_a = \left\{ 0 \leqq s \leqq a,\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a e^{-s^2} s\, ds \right\} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} \right]_0^a dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-e^{-a^2})dt$$

$$= \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$$

よって左の不等式は

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) < \iint_{K_{a,a}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$< \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$$

$a \to \infty$ とすると

$$\lim_{a \to \infty} \iint_{K_{a,a}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}$$

よって $$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$