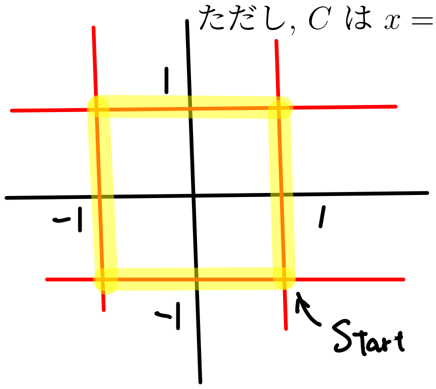
微分積分学 II 小テスト 2009. Jan. 23

問題 1. 次の線積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

ただし, C は $x=\pm 1,\quad y=\pm 1$ で囲まれる正方形とする.



C を

$$\begin{cases} (1,\ t-1) & 0 \leqq t \leqq 2 \\ (3-t,\ 1) & 2 \leqq t \leqq 4 \\ (-1,\ 5-t) & 4 \leqq t \leqq 6 \\ (t-7,\ -1) & 6 \leqq t \leqq 8 \end{cases}$$

とおく. すると 求める積分は

$$\int_0^2 \frac{-(t-1)}{1^2+(t-1)^2}\cdot 0\cdot dt + \frac{1}{1^2+(t-1)^2}\cdot 1\cdot dt$$

$$+ \int_2^4 \frac{-1}{(3-t)^2+(-1)^2}\cdot(-1)\,dt + \frac{3-t}{(3-t)^2+(-1)^2}\cdot 0\cdot dt$$

$$+ \quad 省略$$

上の各行ごとに計算すると

$$\int_0^2 \frac{1}{1+(t-1)^2}dt = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt = \Big[\mathrm{Arctan}\ t\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_2^4 \frac{1}{(3-t)^2+1}dt = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$$

3−t をあらためて t とおいた.

省略した所も それぞれ $\frac{\pi}{2}$ となり, まとめると

$$\frac{\pi}{2}\times 4 = 2\pi$$

問題 2.　次の偏微分を持つような関数は存在するか？

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4x$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4y+4x^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4x+4y^3$$

(a) もし f が存在したとすれば $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ であるが

この問で与えられている例では

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4$$

左側が2回目の微分

となるので 存在しない.

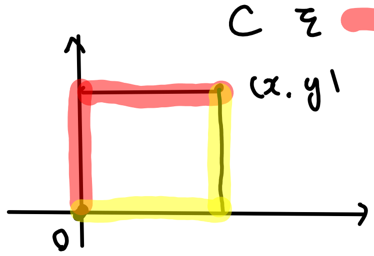
(b) この場合

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4$$

となり両者とも全平面で連続なので

$$f=\int_C (4y+4x^3)dx+(4x+4y^3)dy$$

C を で取ると



$$=\int_0^y (4y+4\cdot 0^3)\cdot 0\cdot dx+(4\cdot 0+4y^3)1\cdot dy$$
$$+\int_0^x (4y+4x^3)1\cdot dx+(4x+4y^3)\cdot 0\cdot dy$$
$$=\int_0^y 4y^3dy+\int_0^x (4y+4x^3)dx=y^4+4xy+x^4$$

C を で取ると、C を $(\overset{t}{\cancel{0}}, \overset{0}{\cancel{t}})$ $0\leqq t\leqq x$,　$(x, t-x)$ $x\leqq t\leqq x+y$ と取れば

$$=\int_0^x (4\cdot 0+4t^3)\cdot 1\cdot dt+(4t+4\cdot 0^3)\cdot 0\cdot dt$$
$$+\int_x^{x+y} (4(t-x)+4x^3)\cdot 0\cdot dt+4x+4(t-x)^3\cdot 1\cdot dt$$
$$=\int_0^x 4t^3dt+\int_x^{x+y}(4x+4(t-x)^3)dt=x^4+4xy+y^4$$