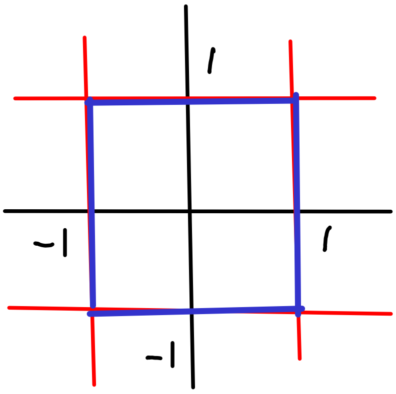
微分積分学 II Jan. 14. 小テスト

問題 1.　次の線積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

但し, C は $x=\pm1, y=\pm1$ から出来る正方形とする.



C を次のように表して考える.

$$(f(t), g(t)) = \begin{cases} 0 \leqq t \leqq 2 & (1, -1+t) \\ 2 \leqq t \leqq 4 & (3-t, 1) \\ 4 \leqq t \leqq 6 & (-1, 5-t) \\ 6 \leqq t \leqq 8 & (t-7, -1) \end{cases}$$

すると 求める線積分は

$$= \int_0^2 \frac{1}{(-1+t)^2+1} \cdot 1\, dt + \int_2^4 \frac{-1}{(3-t)^2+1}(-1)\cdot dt$$

$$+ \int_4^6 \frac{-1}{(-1)^2+(5-t)^2} \cdot (-1) \cdot dt + \int_6^8 \frac{-(-1)}{(t-7)^2+(-1)^2} \cdot 1 \cdot dt$$

$$= 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+1} dt = 4\left[\mathrm{Arctan}\, t\right]_{-1}^{1} = 4\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\pi$$

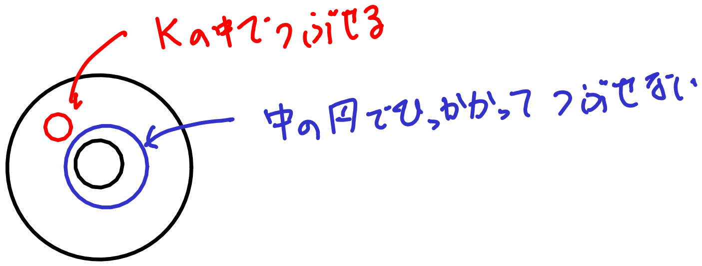
問題 2. 次の領域は単連結か？

(1) $1 < x^2 + y^2 < 4.$

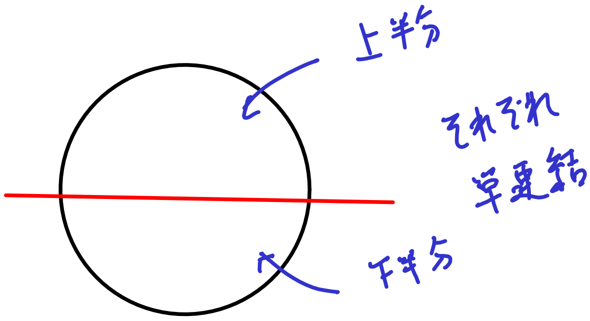
(2) $x^2 + y^2 \leq 4$ かつ $y \neq 0$

(3) $x^2 + y^2 \leq 4$ かつ $x > 0$ で $y \neq 0.$

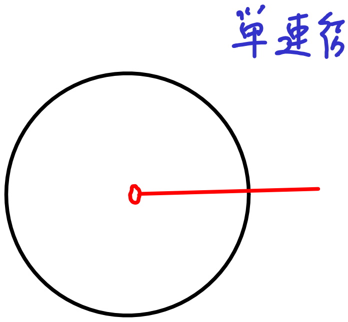
(1)



(2)



(3)



問題 3. 関数 $F(x,y)$ で

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y - 3x^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = y^4 + 2x$$

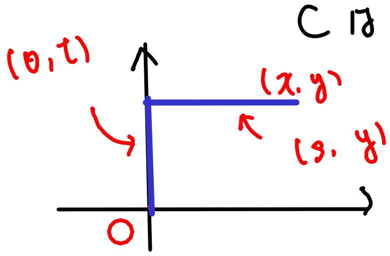
となるものを求めよ.

今 $2y-3x^2$, y^4+2x は全平面で微分可能．従って

定理の仮定をみたすので

$$F(x,y) = \int_C (2y-3x^2)\,dx + (y^4+2x)\,dy$$

C は $(0,0)$ と (x,y) を結ぶ曲線で左のように取る.



$$F(x,y) = \int_0^y (y^4 + \cancel{2x})\,dy + \int_0^x (2y - 3x^2)\,dx$$
$$= \frac{1}{5}y^5 + \cancel{2xy} + 2yx - x^3 = \frac{1}{5}y^5 + \cancel{4}2xy - x^3$$