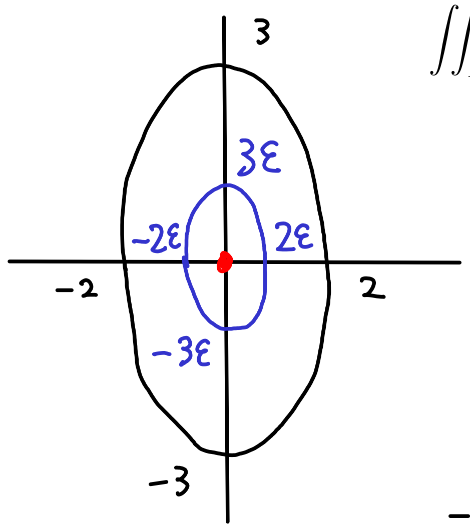
微分積分学 II Dec. 28. 小テスト

問題 1. 次の広義積分は収束することを示せ.

$$\iint_K \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad K = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqq 1 \right\}$$



$K_\varepsilon = \left\{ \varepsilon^2 \leqq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqq 1 \right\}$ と取り (小さな楕円を抜いた)

$\iint_{K_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ を考える.

$x = 2s\cos t \quad y = 3s\sin t$ とおくと

$(x,y) \in K_\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon \leqq s \leqq 1 \\ 0 \leqq t \leqq 2\pi \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} 2\cos t & -2s\sin t \\ 3\sin t & 3s\cos t \end{pmatrix}$

これを代入すると, $\iint_{K_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4s^2\cos^2 t + 9s^2\sin^2 t}} \cdot 6|s| \, ds dt$

$= \iint_{K_\varepsilon} \frac{6}{\sqrt{4\cos^2 t + 9\sin^2 t}} ds dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_\varepsilon^1 (\text{左と同じ}) ds \right\} dt$

$= \int_0^{2\pi} \frac{6(1-\varepsilon)}{\sqrt{4+5\sin^2 t}} dt$

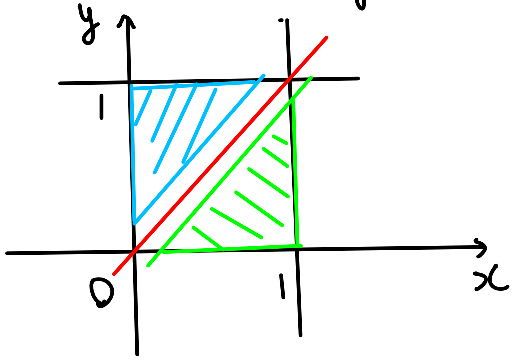
$\leqq \int_0^{2\pi} \frac{6(1-\varepsilon)}{2_{=\sqrt{4}}} = 6\pi(1-\varepsilon)$

$\varepsilon \to 0$ とすれば 収束がわかる.

問題 2. 次の広義積分は収束することを示せ.

$$\iint_K \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}, \quad K = [0,1] \times [0,1]$$

積分の中の関数は $y = x$ に沿って分母が 0



問題 3. 次の広義積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$