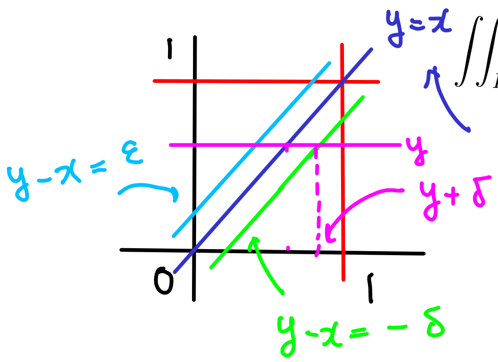
微分積分学 II Dec. 28. 小テスト

先週の問題 2. 次の広義積分は収束することを示せ.

$$\iint_K \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}},\quad K=[0,1]\times[0,1]$$



これに沿って $\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}$ は不連続であることに注意

Kの1部分 $K_{1,\varepsilon}$ $x=0,\ y=1,\ y-x=\varepsilon$ で囲まれた部分

$K_{2,\delta}$ $x=1,\ y=0,\ y-x=-\delta$ で囲まれた部分

とおく

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{K_{1,\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}dxdy \ \text{と}\ \lim_{\delta\to0}\iint_{K_2}\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}dxdy$$

が収束すれば良い.

$$\iint_{K_{2,\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}dxdy = \iint_{K_{2,\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{\cancel{y-x}\ x-y}}dxdy = \int_0^1\left\{\int_{y+\delta}^1 \frac{dx}{\sqrt{\cancel{y-x}\ x-y}}\right\}dy$$

$$= \int_0^1 \left[+2\sqrt{\cancel{y-x}\ x-y}\right]_{y+\delta}^1 dx = \int_0^1 \left(+2\sqrt{1-y} - 2\sqrt{\delta}\right)dy$$

$$= \left[-2\cdot\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\delta}\, y\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - 2\sqrt{\delta}$$

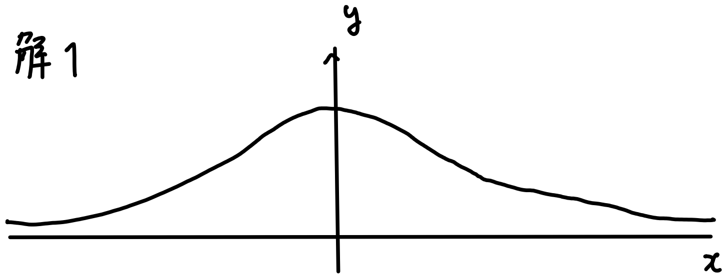
δ→0として収束

前半の積分も同様に収束が示せる.

問題 1. 次の広義積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

解1

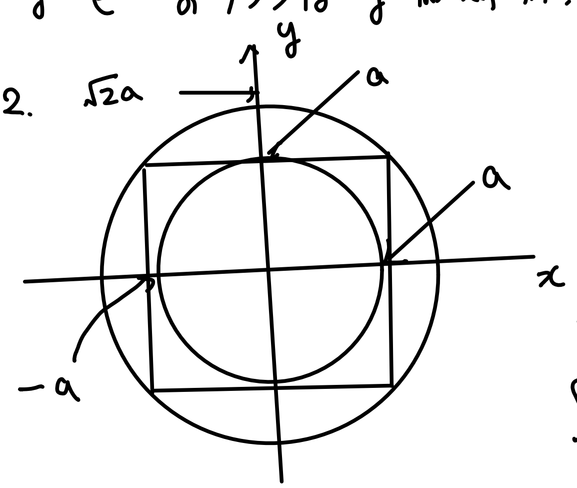


$y=e^{-x^2}$ のグラフは y軸対称. よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

解 2.



四角形 $[-a,a]\times[-a,a]$ に含まれる円と含む円で重積分 $\iint e^{-x^2-y^2}dxdy$ を考える.

$$\iint_S e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi(1-e^{-a^2})$$ となる.

$S: x^2+y^2\le a$ 　後はノートと同様

問題 2.　　次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx$$