微分積分学 II Oct. 29. 小テスト

先週の問題 2. 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\log x dx$$

この函数は

$$\Gamma'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

与式 $= \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\log x\,dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\log x\,dx$ と分解して考える.

後者に関して, $\alpha>1$ に対して $\lim_{x\to\infty}|x^\alpha e^{-x}x^{s-1}\log x|$ を考える.

この極限は $= \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha+s-1}\log x}{e^x} = 0$ となるので積分も収束する.

前者に関して, $\alpha+s-1>0$ と α を取れば

$$\lim_{x\to 0}|x^\alpha e^{-x}x^{s-1}\log x| = \lim_{x\to 0}|e^{-x}||x^{\alpha+s-1}\log x|$$

$x=e^{-y}$ とおけば

$x\to 0$ のとき $y\to\infty$

$x^a\log x = e^{-ay}(-y)$

ここで $a>0$ に対し $\lim_{x\to 0}|x^a\log x| = 0$

となるので上の lim も 0 に収束し, 積分も

収束する.

問題 1. 次の関数で表わされる曲線のグラフを描き, その長さを求めよ.

$$x(t) = t-\sin t, y(t) = 1-\cos t, \quad 0\le t\le 2\pi.$$

$x'(t) = 1-\cos t \qquad y'(t) = \sin t$ なので

$$\text{求める長さ} = \int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt$$

$1-2\sin^2\frac{t}{2} = \cos t$ より $2-2\cos t = 4\sin^2\frac{t}{2}$

これを積分の式に代入すれば

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8 //$$

問題 2. 次の線積分の値を求めよ.

$$\int_C xdy, \quad C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$