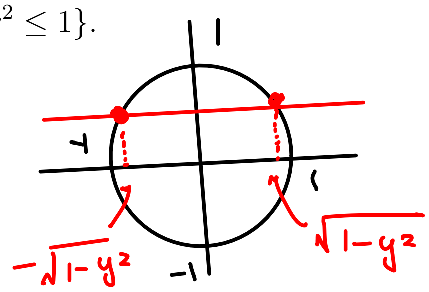
微分積分学 II Nov. 28. 小テスト

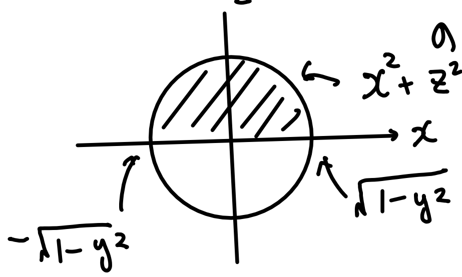
問題 1. 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_K \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \quad K := \{x^2+y^2 \le 1\}.$$

$$与式 = \int_{-1}^{1}\left\{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\right\}dy$$



さて 中の定積分の値は 半径 $\sqrt{1-y^2}$ の円の上半分の面積と等しい.



よって

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}(1-y^2)\,dy = \frac{\pi}{2}\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi$$ …(半球の体積)

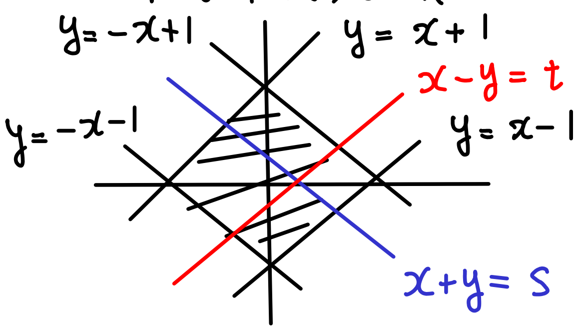
※ 半径 r の球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ / 表面積 $4\pi r^2$ 微積の関係

r の円の面積 πr^2 / 周 $2\pi r$ 〃

問題 2. 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_K x\,dxdy, \quad K = \{|x|+|y| \le 1\}.$$

Kは下のような領域となる.



$s = x+y$

$t = x-y$ とおく. すると,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(s+t) \\ y = \frac{1}{2}(s-t) \end{cases}$$

この s,t で x,y をおきかえると,

$$= \iint_{K'} \frac{1}{2}(s+t)\,|\det J|\,dsdt = \iint_{K'} \frac{1}{2}(s+t)\cdot\frac{1}{2}\,dsdt$$

又 $(x,y)\in K$ となるのは $-1 \leqq s \leqq 1$, $-1 \leqq t \leqq 1$

結局 $K' = [-1,1]\times[-1,1]$. よって重積分の値は

$$= \int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(s+t)\,ds\right\}dt = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{8}s^2+\frac{1}{4}ts\right]_{-1}^{1}dt$$

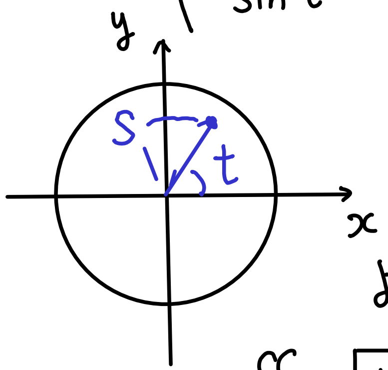
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} t \, dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

問題 1 再び. 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_K \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \quad K := \{x^2+y^2 \le 1\}.$$

$x = s\cos t$, $y = s\sin t$ とおきかえて考える.

$$J = \begin{pmatrix} \cos t & -s\sin t \\ \sin t & s\cos t \end{pmatrix} \text{ より } \quad \det J = s\cos^2 t - (-s)\sin^2 t = s$$



又 $(x, y) \in K$ となるのは

$1 \geqq s \geqq 0$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$

よって

$$\iint_K \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{K'} \sqrt{1-s^2\cos^2 t - s^2\sin^2 t}\, s\, ds\, dt$$

$K' = [0, 1] \times [0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \sqrt{1-s^2}\, s\, ds \right\} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(1-s^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\, dt = \frac{2}{3}\pi$$

〃