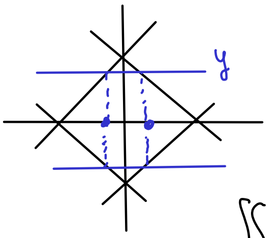
微分積分学 II Nov. 26. 小テスト

問題 1. 次の積分を計算せよ.

$$\iint_K xy\,dxdy, \quad K = \{x, y \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \le 1\}$$

まず普通にやって見る。



求める積分の領域 K を

$K_+ = \{ |x|+|y| \le 1,\ y \ge 0 \}$

$K_- = \{ \quad 〃 \quad y \le 0 \}$

と分割して考える。

$$\iint_K xy\,dxdy = \iint_{K_+} xy\,dxdy + \iint_{K_-} xy\,dxdy$$

$$\iint_{K_+} xy\,dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{y-1}^{1-y} xy\,dx \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{y-1}^{1-y} dy$$

$$= \int_0^1 0 \cdot dy = 0.$$

同様に

$$\iint_{K_-} xy\,dxdy = \int_{-1}^0 \left\{ \int_{-1-y}^{1+y} xy\,dx \right\} dy$$

$$= \int_{-1}^0 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{-1-y}^{1+y} dy$$

$$= \int_{-1}^0 0 \cdot dy = 0 〃$$

講義のはじめではここが 1-y, y-1 となっていたので計算ミスとなった。

まとめて $\iint_K xy\,dxdy = 0.$

先週の問題 2 再考. 次の積分を計算せよ.

$$\iint_K \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy, \quad K = \{x, y \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 1\}.$$

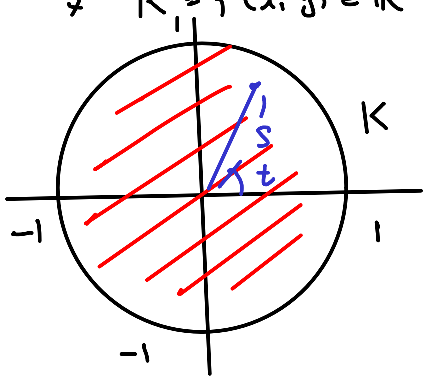
先週の計算から上の積分の値は $\frac{2}{3}\pi$ であることがわかっている。

さて、 $x = s\cos t,\ y = s\sin t$ とおく。すると

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -s\sin t & s\cos t \end{pmatrix}$$

よって $|\det J| = |s|$

又 $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ は $K' = \{0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi\}$



以上から

$$\iint_K \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{K'} \sqrt{1 - s^2\cos^2 t - s^2\sin^2 t}\ |s|\,ds\,dt$$

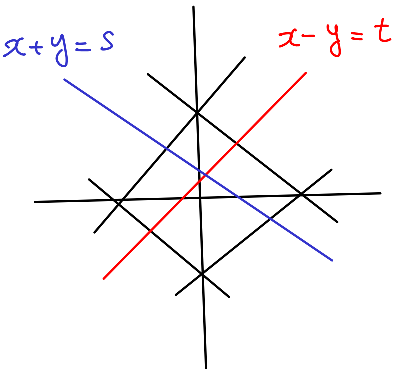
$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \sqrt{1 - s^2} \cdot s\,ds \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(1 - s^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\,dt = \frac{2}{3}\pi$$

~~**問題 2.** 次の広義積分は収束することを示せ.~~

$$\cancel{\iint_K \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}, \quad K = [0,1]\times[0,1]}$$

次に変数を変換して計算してみる.



$$\iint_K xy\,dxdy \qquad K = \{ |x| + |y| \leqq 1 \}$$

$\begin{cases} s = x+y \\ t = x-y \end{cases}$ とおく. すると $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(s+t) \\ y = \frac{1}{2}(s-t) \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad |\det J| = \frac{1}{2}$$

$K = \{ |x| + |y| \leqq 1 \}$ は $K' = [-1, 1] \times [-1, 1]$ となる.

以上より

$$\iint_K xy\,dxdy = \iint_{K'} \frac{1}{2}(s+t)\cdot\frac{1}{2}(s-t)\cdot\frac{1}{2}\,dsdt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}(s^2 - t^2)\,ds \right\} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}s^3 - st^2\right) \right]_{-1}^{1} dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3} - 2t^2\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}t - \frac{2}{3}t^3\right]_{-1}^{1} = 0$$