微分積分学 II Nov. 21. 小テスト

先週の問題 2. 次の関数で表わされる曲線のグラフを描き，その長さを求めよ．

$$x(t) = t - \sin t, y(t) = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

長さを l とすると，

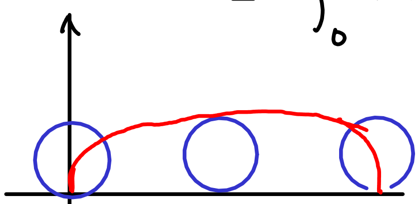
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt$$

$\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$ より $2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$.

これを代入して

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\, dt = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8$$



グラフは左のようになる．半径1の円をころがした時円の1点が動く軌跡．

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ を利用して増減表を書くと良い

問題 1. 次の線積分の値を求めよ．

$$\int_C x dy, \quad C := \{(x, y) \in \underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\mathbb{R}^2}; x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

平面上の点

$$\int_C h(x,y)dy = \int_a^b h(f(t), g(t))\, g'(t)\, dt$$

$$\frac{dy}{dt} dt = dy$$

定義に従って計算すると

$$\int_C x\, dy = \int_0^{2\pi} \cos t\, (\cos t) dt$$

($x = \cos t$, $y = \sin t$ $0 \le t \le 2\pi$ とおいた．)

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin \cancel{4t}\,2t}{\cancel{2}\,4} + \frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

(Cの面積)

注 $x, y \geqq 0$ ならば，$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ と t の変域が変わり

$$\int_C x dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = 1 + \frac{\pi}{4}$$

問題 1.　次の積分を計算せよ.

$$\iint_K xydxdy, \quad K = [0,1] \times [0,1].$$

$$\iint_K xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 xy\,dx \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y\,dy = \left[\frac{1}{4} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 xy\,dy \right\} dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{4}$$