微分積分学 II Nov. 19. 小テスト

先週の問題 2. 次の線積分の値を求めよ.

$$\int_C x dy, \quad C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

定義から C: $(a(t), b(t))$ $t_0 \leqq t \leqq 1$ と表せるとき,

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_{t_0}^{t_1} f(a(t), b(t))\, b'(t)\, dt \qquad \left(dy = \frac{dy}{dt} dt \right)$$

この問題では C: $(\cos t, \sin t)$ $0 \leqq t \leqq 2\pi$ と表せるので,

$$\int_C x\, dy = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ より $\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$

よって求める積分は $= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)\, dt = \left[\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t \right]_0^{2\pi}$

$= \pi$ ←(Cの内部の面積)

問題 1. 次の積分を計算せよ.

$$\iint_K xy dx dy, \quad K = [0, 1] \times [0, 1].$$

$$\iint_K xy\, dx\, dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 xy\, dx \right\} dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^1 dy$$

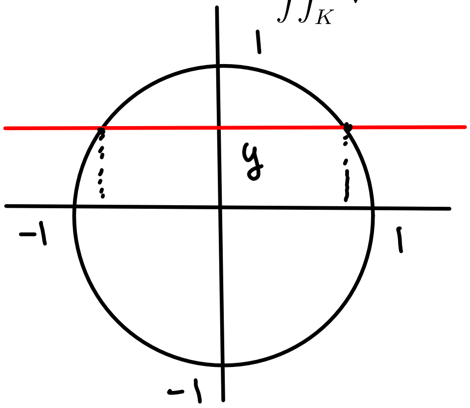
x, y どちらに 0, 1 を代入するべきか注意すること.

$$= \int_0^1 \frac{y}{2}\, dy = \left[\frac{1}{4} y^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}$$ //

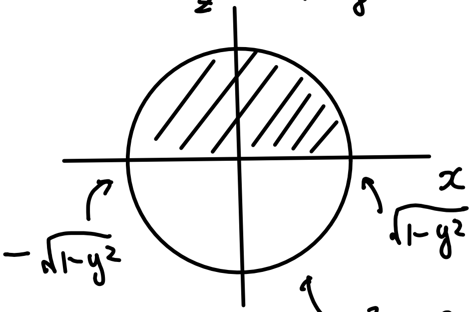
問題 2.　次の積分を計算せよ.

$$\iint_K \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \quad K=\{x,y\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2 \overset{\leqq}{\geq} 1\}.$$



まず y を固定して x で積分する.

$$\int_{-1}^{1}\left\{\underbrace{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx}_{z}\right\}dy$$



積分の中味は

左の半径 $\sqrt{1-y^2}$ の円

の上の半分の面積

$$x^2+z^2=1-y^2$$

$$(z=\sqrt{1-y^2-x^2})$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}\cdot(1-y^2)\,dy=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\pi$$