微分積分学 II Oct. 31. 小テスト

問題 1. 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad (p, q > 0).$$

まず $q \geqq 1$ のときは上の積分は普通の積分なので

$q < 1$ として考えて良い. すると

$$\lim_{x \to 1} |x-1|^{1-q} \left(|x^{p-1}(1-x)|^{q-1} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1} |x^{p-1}| = 1$$

と収束するので, この積分は収束する.

問題 2. 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} \log x dx$$

問題 3. ベータ関数 $B(p,q)$ を次のように定義する.

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0)$$

このとき, 次の等式が成立することを示せ.

$$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$$

$$B(p+1,q) = \int_0^1 x^p \underbrace{(1-x)^{q-1}}_{\text{こちらを積分}} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{q}(1-x)^q \cdot x^p\right]_0^1 + \frac{p}{q}\int_0^1 (1-x)^q x^{p-1}dx$$

$$= \frac{p}{q}\int_0^1 (1-x)^q x^{p-1}dx$$

$$= \frac{p}{q}\int_0^1 (1-x)(1-x)^{q-1}x^{p-1}dx$$

$$= \frac{p}{q}\int_0^1 (1-x)^{q-1}x^{p-1}dx - \frac{p}{q}\int_0^1 x(1-x)^{q-1}x^{p-1}dx$$

$$= \frac{p}{q}B(p,q) - \frac{p}{q}B(p+1,q)$$

$\frac{p}{q}B(p+1,q)$ を左辺に移項すると,

$$\frac{p+q}{q}B(p+1,q) = \frac{p}{q}B(p,q)$$

よって $$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$$

※ $B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$ も同様に示せる.