微分積分学 II Oct. 29. 小テスト

問題 1.　次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^{1/2} x^p(1-x)^q dx \qquad (p, q > -1)$$

まず $p \geqq 0$ のときは 上の積分は普通の積分なので $p < 0$ のときを問題にする. このとき $\lim_{x \to 0} x^p(1-x)^q = \infty$

又 $\underbrace{x^{-p} \times x^p(1-x)^q}_{= (1-x)^q} \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ となるので

積分 $\int_0^{1/2} x^p(1-x)^q dx$ は存在する.

問題 2.　次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} \log x dx$$

問題 3.　ベータ関数 $B(p,q)$ を次のように定義する.

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p, q > 0)$$

このとき, 次の等式が成立することを示せ.

$$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$$

$$B(p+1, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx = \left[-x^p (1-x)^q \cdot \frac{1}{q} \right]_0^1 + \frac{1}{q}\int_0^1 p \cdot x^{p-1} (1-x)^q \cdot dx$$

$$= \frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q \cdot dx = \frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \cdot (1-x) dx$$

$$= \frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx - \frac{p}{q}\int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx$$

$$= \frac{p}{q} B(p, q) - \frac{p}{q} B(p+1, q)$$

よって $\dfrac{p+q}{q} B(p+1, q) = \dfrac{p}{q} B(p, q)$. これから求める式を得る.