

微分積分学 II Oct. 16. 小テスト

問題 1. 次の積分を計算せよ.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$x = \tan t$  とおいて考える.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \int \frac{dx}{1+\tan^2 t} = \int \frac{1}{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}} dx \\ &= \int \cos^2 t dx = \int \cos^2 t \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int \cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int 1 dt \\ &= t = \text{Arctan } x \end{aligned}$$

問題 2. 次の積分を計算せよ.

Arctan  $x$

$$\int \text{Arctan } x dx$$

$$\int \text{Arctan } x dx = \int 1 \cdot \text{Arctan } x dx = x \text{Arctan } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ここで後者の積分を計算するために  $x^2 = t$  とする.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot dx$$

$$t = x^2 \text{ より } \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= -\frac{1}{2} 2\sqrt{1-t} = -\sqrt{1-x^2}$$

以上より、求める積分は  $x \cdot \text{Arctan } x + \sqrt{1-x^2}$

問題 3. 次の積分を計算せよ.

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 2x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

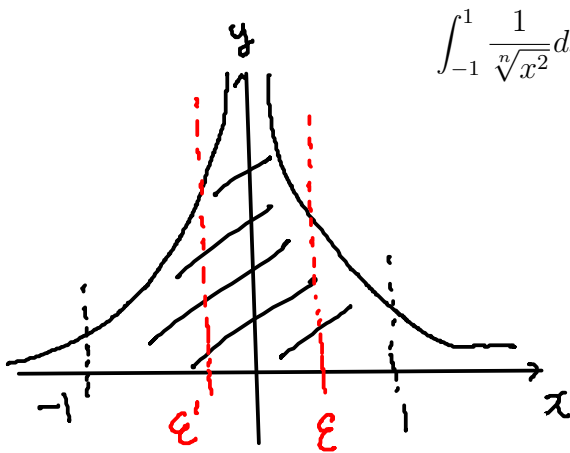
$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x \cdot e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x}$$

※ 手間はかかるが 同様に  $\int (\text{多項式}) \cdot e^{ax} dx$  も積分できる.  
置換積分を組み合わせると  $\int x^m (\log x)^n dx$  も積分できる.

問題 4. 次の積分を計算せよ.



$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} dx \quad (n \geq 3)$$

$y = x^{-\frac{2}{n}}$  のグラフ.  $(x^2)^{-\frac{1}{n}}$  のグラフ. 1/4 だけ解答

$$\int_{-1}^1 x^{-\frac{2}{n}} dx = \left[ \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} x^{1 - \frac{2}{n}} \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{n}{n-2} \left| \frac{n-2}{n} \right|$$

$$= \frac{n}{n-2} \left[ \frac{n-2}{n} - \frac{n}{n-2} (-1)^{\frac{n-2}{n}} \right]$$

$$= \frac{2n}{n-2} \left[ (-1)^{1 - \frac{2}{n}} - \frac{2}{n} \right]$$

$$= \frac{2n}{n-2} \left[ (-1) - (-1) \right]$$

求める積分

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 (x^2)^{-\frac{1}{n}} dx$$

$$+ \lim_{\epsilon' \rightarrow -0} \int_{-1}^{-\epsilon'} (x^2)^{-\frac{1}{n}} dx$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left\{ \frac{n}{n-2} \left| \frac{n-2}{n} \right| - \frac{n}{n-2} \epsilon^{\frac{n-2}{n}} \right\}$$

$$+ \lim_{\epsilon' \rightarrow -0} \left\{ \frac{n}{n-2} (\epsilon')^{\frac{n-2}{n}} - \frac{n}{n-2} (-1)^{\frac{n-2}{n}} \right\} = \frac{2n}{n-2}$$

$-1 + \frac{2}{n} \left\{ \frac{n-2}{n} \right\}$   
 $-1$